V. DUMITRU
V. IONESCU

Une méthode de solution numérique d'une catégorie de problèmes de programmation non linéaire

L'optimisation des processus techniques et économiques conduit souvent à des modèles de programmation non linéaire. Cette étude expose une généralisation des résultats de H. Maurin, pour une catégorie de problèmes non linéaires et traite également un exemple numérique.

Dans cette étude nous nous occupons des problèmes du type suivant: Obtenir l'optimum de la fonction:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} P_j(y) \cdot x_j \tag{1}$$

avec les conditions

$$\sum_{j=1}^{n} A_i^j(y)\, x_j = a_i(y) \qquad i = (1 \dots m) \tag{2}$$

où $P_j(y)$, $A_i^j(y)$ et $a_i(y)$ sont des polynômes d'un degré quelconque dans y. H. Maurin [1] a donné un algorithme de solution pour cette catégorie de problèmes, dans le cas de polynomes du degré I, alors que I. Dragan [2] traite le problème de programmation paramétrique dans le cas où $P_j(y)$ sont des polynômes de degré II et A_i^j et a_i sont des constantes.

Dans cette étude nous considérons le cas où $A_i^j(y)$, $a_i(y)$ et $P_j(y)$ sont des polynômes de degré II en y, pour $j = j_0$ et $i = (1 \dots m)$, et pour $j \neq j_0$ des constantes et nous donnons un exemple numérique.

Avec H. Maurin, nous remarquons qu'il suffit de traiter le problème seulement au cas où les équations de condition sont non linéaires, car lorsque la fonction est, elle aussi, non linéaire, nous l'annexons aux équations de condition et optimisons x_0.

Considérons donc le problème

$$\max x_0 = fx \text{ avec les conditions} \tag{1'}$$

$$A\,x = a,\ x \geqslant o,\ \ y \geqslant 0 \tag{2'}$$

où x est un vecteur colonne à n composantes, f un vecteur ligne à n composantes, $x_0 = fx$ fonction à optimiser, A est la matrice des restrictions où l'un des vecteurs colonne A^k a la forme

$$A^k = \bar{A}^k + y\,A'^k + y^2\,A''^k$$
$$\text{et } a = \bar{a} + y\,a' + y^2\,a'' \qquad (2'')$$

avec $\bar{A}^k$, A'^k, A''^k, $\bar{a}$, a' a'', vecteurs constants, et y la variable non linéaire. Si l'on considère le problème comme un problème paramétrique, il ne sera plus soumis aux conditions de non négativité. La méthode de solution sera toutefois la même, en considérant le problème comme un problème de programmation linéaire paramétrique.

L'algorithme, donné dans [1], consiste dans la détermination des valeurs limites de y, pour lesquelles :

— la matrice de base devient singulière
— la solution cesse d'être réalisable
— la solution cesse d'être optimale

Supposons que l'on connaisse une solution optimale pour une valeur particulière y_0 de la variable y, valeur qui peut être prise comme égale à zéro, effectuant un changement des origines.

Deux cas peuvent se produire :

a) $\bar{A}^k$ n'est pas vecteur de la base optimale A^{I_0} pour $y = 0$. Les quantités variables en fonction de y sont :

— T_0 — vecteur transformé de A^k par $(A^{I_0})^{-1}$
— δ^k — indicateur de l'optimum pour l'inconnue x_k
— vecteur a

Nous avons :

$$T_0^k = [A^{I_0}]^{-1}\,(\bar{A}^k + y\,A'^k + y^2\,A''^k) = \bar{T}_0^k + y\,[A^{I_0}]^{-1}\,A'^k + y^2\,[A^{I_0}]^{-1}\,A''^k \qquad (3)$$

ou, en mettant

$$[\bar{A}^{I_0}]^{-1}\,A'^k = W_0'^k \text{ et } [A^{I_0}]^{-1}\,A''^k = W_0''^k \qquad (4)$$

$$T_0^k = \bar{T}_0^k + y\,W_0'^k + y^2\,W_0''^k \text{ et} \qquad (5)$$

$$\delta^k = \delta_0^k - y\,f^{I_0}\,W_0'^k - y^2\,f^{I_0}\,W_0''^k \qquad (6)$$

Etant donné que pour $j = 0$ nous avons un optimum et, par conséquent $\delta_0^k \leqslant 0$ il résulte que la solution actuelle :

— reste optimale pour $\forall\, y > 0$, si $f^{I_0}\,W_0'^k \geqslant 0$ et $f^{I_0}\,W_0''^k \geqslant 0$

— si $y_1' \leqslant y_1''$ sont les deux racines de l'équation $\delta^k = 0$ alors la solution reste optimale.

— dans l'intervalle $[0,\ y_1'] \cup (y_1'',\ +\infty)$ si $f^{I_0}\,W_0'^k > 0$ et $f^{I_0}\,W_0''^k < 0$

— dans l'intervalle $[0,\ y_1'']$, si $f^{I_0}\,W_0''^k < 0$

Nous désignerons par D_1 le domaine dans lequel la solution reste optimale. Mais, même alors que le critérium de l'optimisation est vérifié, la solution peut ne pas être réalisable. En effet, nous avons

$$x_{I_0} = [A^{I_0}]^{-1}\,(\bar{a} + y\,a' + y^2\,a'') = \bar{x}_{I_0} + y\,[A^{I_0}]^{-1}\,a' + y^2\,[A^{I_0}]^{-1}\,a'' \qquad (7)$$

ou, en mettant

$$t'_0 = [A^{I_0}]^{-1}\, a',\ t''_0 = [A^{I_0}]^{-1}\, a'' \tag{8}$$

$$x_{I_0} = \bar{x}_{I_0} + y\, t'_1 + y^2\, t''_0 \tag{9}$$

donc, si t'_0 et $t''_0 \geqslant 0$, la solution reste réalisable pour n'importe quel y.

Nous désignerons par D_2 l'intersection de tous les domaines de positivité des m polynômes du second degré : $x_i = \bar{x}_i + y\, t'_{0i} + y^2\, t''_{0i}$. Soit $D = D_1 \cap D_2$. Pour $y \in D$ la solution est optimale et réalisable ; pour CD peuvent intervenir 3 situations :

1. La solution est optimale, mais non réalisable, auquel cas on change la base à l'aide de la méthode simpliciale jusqu'à satisfaction du critérium d'optimisation.

2. La solution est réalisable, mais non optimale, auquel cas on introduit à la base le vecteur A^k suivant l'algorithme simplex.

3. Il existe un intervalle dans lequel la solution n'est ni réalisable, ni optimale. Dans ce cas, on cherche si le problème a une solution réalisable dans cet intervalle ([3] page 151).

Les intervalles pour lesquels les transformations aux points 1 et 2 ne peuvent se faire, nous donnent les valeurs de y pour lesquelles le problème n'a pas de solution.

b) $\bar{A}^k$ est le vecteur q de la base optimale A^{I_0} pour $y = 0$. Dans ce cas, le vecteur de base varie avec y. La matrice inverse de la base varie donc avec la relation

$$[A^{I_0}]^{-1} = E^{(q)}\, [A^{I_0}]^{-1} \tag{10}$$

La matrice élémentaire $E^{(q)}$ est construite depuis la matrice unité dans laquelle le vecteur unitaire q est remplacé par le vecteur $V^{(q)}$ des composantes

$$\left.\begin{aligned} V_q^q &= \frac{1}{T_{0q}^k} = \frac{1}{1 + y\, W_{0q}^{\prime k} + y^2\, W_{0q}^{\prime\prime k}} \\ V_i^q &= \frac{T_{0i}^k}{T_{0q}^k} = -\frac{y\, W_{0i}^{\prime k} + y^2\, W_{0i}^{\prime\prime k}}{1 + y\, W_{0q}^{\prime k} + y^2\, W_{0q}^{\prime\prime k}} \\ i &\in \{I_0 - q\} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Si y varie, nous avons 3 cas :

1. La matrice A^I devient singulière si $1 + y\, W_{0I}^{\prime k} + y^2\, W_{0I}^{\prime\prime k} = 0$

2. La solution cesse d'être réalisable si l'une des composantes du vecteur y s'annulle et devient négative.

Or nous avons :

$$x_{I_0} = E^{(q)}\, (\bar{x}_{I_0} + y\, t'_0 + y^2\, t''_0) \tag{12}$$

La réalisation de la solution revient à la discussion du signe du polynôme du quatriéme degré.

3. La solution cesse d'être optimale si $\delta^{\bar{I}_0} \not\leqslant 0$, autrement dit s'il existe au moins un $j \notin I_0$ afin d'avoir $\delta^j > 0$. Or, nous avons

$$\delta^j = -f^{I_0} E^{(q)} T_0^j + f^j, \quad \delta \in \bar{I}_0 J_0 \tag{13}$$

L'optimisation revient donc à la discussion du signe des quantités $\delta_{j \in I_0}$, en d'autres mots à la discussion du signe de n-m polynômes du second degré.

L'intersection de ces situations est résolue comme pour le point a.

Le problème se termine par la détermination de tous les domaines où le problème de programmation linéaire dans lequel y est pris comme paramètre, a des solutions réalisables, optimales. Ces solutions dépendent de y. En etudiant le maximum de la fonction d'optimisation, en général différemment définie par les divers domaines trouvés, quand y varie dans ces domaines, et prenant le maximum maximorum, nous obtenons la solution du problème de programmation non linéaire.

Exemple numérique

Déterminer le maximum de la fonction:

$$x = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

dans les conditions:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + (y^2 + 3y + 2)\, x_3 = y^2 + y + 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + (y^2 - 2y + 1)\, x_3 = 2y^2 - 3y + 4 \\ x_i, \ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Pour $y = 0$, appliquant l'algorithme simplex, nous trouvons la solution optimale

$$\bar{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$[A^{I_0}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans le cas où $A^k = A^3$ n'est pas un vecteur de la base optimale.

Avec les notations introduites antérieurement nous avons:

$$\bar{A}^k = \bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A'^k = A'^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad A''^k = A''^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} a' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} a'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f^{I_0} = (4, -3); \quad \delta_0^k = -(4, -3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -\frac{41}{6}$$

Afin de déterminer le domaine de y où la solution reste optimale, nous devons calculer :

$$W_0'^{k=3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$W_0''^{k=3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il résulte que :

$$\delta^k = \delta_0^k - y^2 f^{I_0} W''^k - y f^{I_0} W'^k = -\frac{41}{6} - y\left(\frac{44}{6} + \frac{15}{2}\right) - y^2 \frac{4}{3}$$

et donc la solution est optimale pour n'importe quel $y > 0$.

Pour trouver le domaine réalisable de la solution, nous calculons :

$$[A^{I_0}]^{-1} a'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[A^0]^{-1} a' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que

$$x_{I_0} = \bar{x}_{I_0} + y^2 [A^{I_0}]^{-1} a'' + y [A^{I_0}]^{-1} a' = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + y^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{6} + y + \frac{5}{6} \\ \frac{y^2}{2} - 2y + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$x_1 = \frac{1}{2} y^2 - 2y + \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{6} y^2 + y + \frac{5}{6} \qquad (14)$$

solution restant réalisable pour $y \in [0, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; \infty)$

Suivant le résultat ci-dessus, cette solution est également optimale pour cet intervalle.

Etant donné que la solution devient irréalisable pour l'intervalle $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$, restant optimale, il faudra changer la base en enlevant le vecteur A^1 de l'ancienne base par application du critérium dual simplex, à un point $2-\sqrt{3}+\varepsilon$.

Pour faciliter la calcul, nous déterminerons une nouvelle base pour la valeur particulière $y = 2$ de l'intervalle $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ et nous analyserons de nouveau le domaine d'optimisation et réalisable de la nouvelle base.

Pour $y = 2$ nous avons: $x_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Employant la méthode duale simplex, nous enlevons x_1 de la base et obtenons une nouvelle base.

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad [A^{I_0}]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Nous avons maintenant le cas où $A^k = A^3$ est un vecteur de la base optimale.

Pour pouvoir appliquer les formules de détermination du domaine réalisable et de l'optimisation, nous ferons un changement de variable pour le paramètre y, vu que les formules (12, 13) ont été déduites pour le cas où nous connaissons une solution initiale pour $y = 0$. Ce changement de variable est $y = z + 2$ pour $z \in (-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

Nous aurons:

max $x_0 = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$, dans les conditions:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + (z^2 + 7z + 12)\, x_3 = z^2 + 5z + 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + (z^2 + 2z + 1)\, x_3 = 2z^2 + 5z + 6 \end{cases}$$

Pour $z = 0$ nous avons la solution (15).

La détermination du nouveau domaine d'optimisation et réalisable se fera à l'aide des formules (13), (14), pour lesquelles nous avons :

$$A'^k = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A''^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A}^k = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad a' = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad a'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{T}_0^k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad W_0''^k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_0'^k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{33} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

d'où

$$T_0^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{17}{33} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} z^2 + \frac{17}{33} z \\ \frac{5}{11} z + 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\frac{1}{3} z^2 + \frac{17}{33} z}{\frac{5}{11} z + 1} \\ 0 \quad \dfrac{1}{\frac{5}{11} z + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{11 z^2 + 17 z}{3 (5 z + 11)} \\ 0 \quad \dfrac{11}{5 z + 11} \end{pmatrix}$$

et

$$\bar{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} \frac{21}{11} \\ \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$t_0' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_0'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{33} \\ \\ -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Nous aurons :

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11\,z^2 + 17\,z}{3\,(5\,z + 11)} \\ \\ 0 & \frac{11}{5\,z + 11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{21}{11} + \frac{5}{3}\,z + \frac{23}{33}\,z^2 \\ \\ \frac{3}{11} - \frac{1}{11}\,z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

d'où

$$x_2 = \frac{z^4 + 12\,z^3 + 45\,z^2 + 79\,z + 63}{3\,(5z + 11)}$$

$$x_3 = \frac{3 - z^2}{5\,z + 11}$$

Il est facile de constater que ces solutions sont réalisables pour $z \in [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$.

Revenant à la variable y, on constate que la nouvelle solution de base

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{y^4 + 4\,y^3 - 3\,y^2 + 11\,y + 5}{3\,(5y + 1)} \\ x_3 &= \frac{-\,y^2 + 4\,y - 1}{5\,y + 1} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

est réalisable pour l'intervalle $[2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$

Pour trouver le domaine d'optimisation de la nouvelle base, nous calculons : $\delta^j = -\,f^{I_0}\,E^{(q)}\,T_0^j + f^j$

Dans notre cas, nous devons calculer seulement δ^1 correspoondant au seul vecteur qui n'est pas dans la base.

Nous avons : $f^{I_0} = (4, -2)$.

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{33} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}; \quad f^1 = -3$$

donc :

$$\delta^1 = -(4; -2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11z^2 + 17z}{3(5z + 11)} \\ 0 & \frac{11}{5z + 11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{35}{33} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix} - 3$$

$$\delta^1 = -\frac{8z^2 + 76z + 11}{3(5z + 11)} - 3$$

On constate que la solution est également optimale pour $z \in [-\sqrt{3}; +\sqrt{3}]$, alors que de l'expression de la matrice E il résulte que cette solution est non singulière pour tout $y \neq -\frac{1}{5}$ ou $z \neq -\frac{11}{5}$

Revenant à la variable y, il résulte que pour $y \in [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$ la solution optimale de base est donnée par

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{y^4 + 4y^3 - 3y^2 + 11y + 5}{3(5y + 1)} \\ x_3 &= \frac{-y^2 + 4y - 1}{5y + 1} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Synthétisant la recherche, il résulte que les valeurs optimales de la fonction objective, en fonction de y, seront données par l'expression

$$x_0 = \begin{cases} \frac{-5y^2 + 60y + 11}{6} & \text{pour } y \in [0; 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}; \infty) \\ \frac{4y^4 + 16y^3 - 6y^2 + 20y + 26}{3(5y + 1)} & \text{pour } y \in [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]^{*)} \end{cases} \qquad (18)$$

La solution du problème de la programmation non linéaire revient maintenant à l'étude du maximum de la fonction $x_0(y)$. La représentation graphique est donnée par la fig. 1 et la valeur du maximum se trouve être $y = 6$. Remplaçant cette valeur dans (14), on trouve :

$x_1 = 13/2$, $x_2 = 77/6$. Donc la solution, unique, du problème proposé est :

$x_1 = 13/2$, $x_2 = 77/6$, $x_3 = 0$, $y = 6$, et

$$x_0 \max = 191/6.$$

---

* Pour $y = 2 \pm \sqrt{3}$ les valeurs données par les deux expressions coincident.

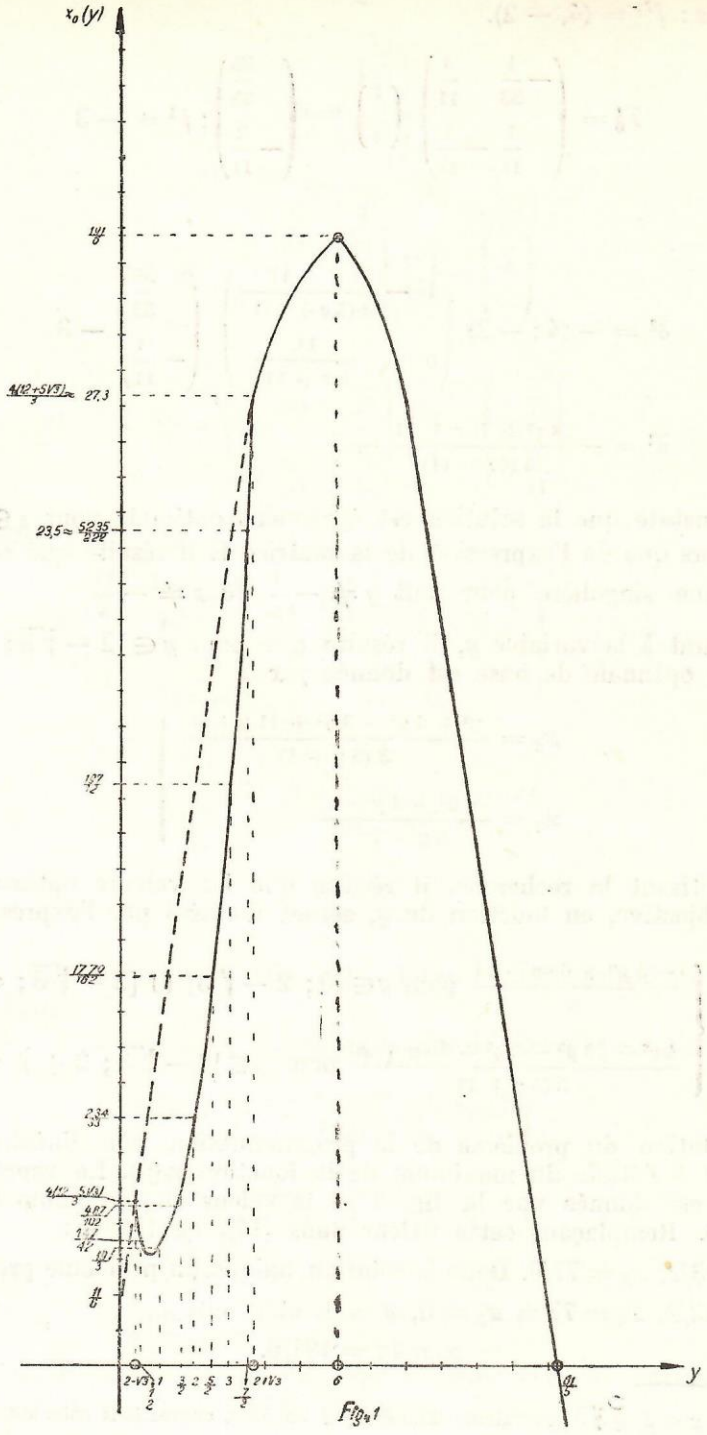
$x_0(y)$
$\frac{141}{6}$
$\frac{4(12+5\sqrt{3})}{3} \approx 27{,}3$
$23{,}5 \approx \frac{5235}{222}$
$\frac{127}{2}$
$\frac{1772}{182}$
$\frac{238}{33}$
$\frac{11}{6}$
$2-\sqrt{3}$
1
$\frac{3}{2}$
2
$\frac{5}{2}$
3
$2+\sqrt{3}$
6
$\frac{91}{6}$
y

Fig. 1

BIBLIOGRAPHIE:

1] H. Maurin — *Paramétrisation générale d'un programme linéaire*, Revue Française de Recherches Opérationnelles, No. 32/1965.

[2] I. Drăgan — *Asupra unei clase de probleme de programare parametrică (Sur une catégorie de problèmes de programmation paramétrique* — Etudes et Recherches mathématiques No. 3/1965, thème 17.

[3] M. Simonnard — *Programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1962.

A METHOD FOR THE NUMERICAL SOLVING OF A CATEGORY OF PROBLEMS IN RELATION TO NON-LINEAR PROGRAMMATION

The problems of the optimization of some economic processes require the permanent development of the methods of linear, parametrical, nonlinear, discreet, stockastical and dynamical programmation.

This paper deals with the following problems:

To obtain the optimum of the function:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} P_j \ (y)\, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_i^j(y)\, x_j = a_i\,(y),\ i = \ (1\ ,\ ,\ldots\ ,\ m)$$

where $P_j\ (y)$, $A_i^j\ (y)$ and $a_i\ (y)$ are the polynomials of a given degree in y.

This paper gives a solving algorism of the problem in the case where $A_i^j\,(y)$, $a_j\ (y)$ and $P_j\ (y)$ are polynomials of degree II in y, for $j = j_0$ and $i = (1, \ldots, m)$ and constants for $j \neq j_0$.

In principle, this method can be applied to polynomials of any degree, however the calculations may become very dificult in case $i = (1, \ldots, m)$ and $j = (1, \ldots, n)$.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КЛАССА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Вопросы оптимизации экономических процессов требуют дальнейшего развития методов линейного, параметрического, нелинейного, дискретного, стохастического, динамического программирования.

В статье имеются в виду вопросы следующего типа:

Найти оптимум функции:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} P_j\,(y)\, x_j$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} A_i^j\ (y)\, x_j = a_i\,(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где: $P_j\,(y)$, $A_i^j\ (y)$ и $a_i\,(y)$ — полиномы любой степени y.

В статье приводится алгоритм решения задачи в том случае, когда $A_i^j\,(y)$, $a_i\,(y)$ и $P_j\,(y)$ являются полиномами II степени y при $j = j_0$ и $i = 1, 2, \ldots, m$, и неизменными при $j \neq j_0$.

В принципе этот метод можно применять для полиномов любой степени при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, но трудности расчета могут стать очень большими.