Dr. PETRU L. IVĂNESCU*)
Dr. SERGIU RUDEANU*)

Une théorie des décisions binaires Le cas linéaire**)

On donne quelques exemples montrant l'utilité pratique des modèles de programmation linéaire bivalente. On propose une méthode pour résoudre les problèmes de ce type.

1. INTRODUCTION

La question du choix se pose dans de nombreux problèmes économiques : étant donné un certain ensemble d'activités, chercher certains sous-ensembles qui satisfassent aux conditions du problème et qui — éventuellement — minimisent (ou maximisent) une fonction. Dans cette étude on indique trois problèmes de ce genre.

Le premier paragraphe de l'article s'occupe d'une série d'exemples dans lesquels des problèmes économiques demandent la prise de décisions du type „oui " ou „non" („on fabrique" — „on ne fabrique pas", „on construit" — „on ne construit pas", etc.)

Les problèmes ayant trait aux décisions binaires linéaires peuvent être groupés en deux catégories principales. Ceux de la première catégorie demandent la solution d'un système d'équations et d'inégalités bivalentes. Le deuxième paragraphe du travail décrit une méthode permettant d'obtenir toutes les solutions possibles de ce problème. Les solutions sont groupées en „familles de solutions" dont la détermination ne soulève aucune difficulté de calcul.

Les problèmes de la deuxième catégorie nécessitent la minimisation (ou la maximisation) d'une fonction linéaire à variables bivalentes, soumises à un système d'équations et d'inégalités linéaires. Le troisième paragraphe propose la méthode suivante pour la solution du problème : *a)* détermination de toutes les solutions des conditions restrictives (comme dans le § 2) ; *b)* choix de la solution la plus favorable dans chaque famille ; *c)* détermination de la solution la plus favorable du problème parmi les solutions trouvées au point b).

Le quatrième paragraphe étend les méthodes proposées dans les paragraphes 2—3 au cas de la programmation linéaire bivalente paramétrique (les paramètres paraissant dans les coefficients de la fonction-objectif).

Les méthodes proposées ont les avantages suivants :

1. Elles nécessitent un volume relativement réduit de calculs.

*) Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine, Bucarest.

**) Communication faite à la session scientifique du Centre de Calcul Economique et de Cybernétique Economique, Bucarest, 11—13 février 1966.

2. Les calculs nécessaires sont élémentaires et peuvent être exécutés soit à l'aide de calculateurs électroniques, soit à la main (par un personnel de qualification moyenne).

3. Ces méthodes peuvent être étendues sans difficultés à la solution des problèmes de programmations linéaire ou non-linéaire en nombres entiers.

Exemple 1. Un fond d'investissement S est alloqué au développement d'une industrie. Il existe n projets pouvant contribuer à la réalisation de ce but. Chaque projet j nécessite un certain investissement, noté I_j et rapporte un certain bénéfice b_j par an. Le plan prévoit la réalisation d'une production d'au moins π unités par an. Le projet j permet la réalisation d'une production annuelle π_j. La réalisation du projet j nécessite l'importation d'un outillage ayant la valeur v_j; Le quantum total d'importation admissible pour le développement de l'industrie qui nous intéresse est V. On demande la prise de décisions (binaires) indiquant, parmi les projets possibles, ceux qui seront mis en application, de façon à réaliser le bénéfice maximum tout en respectant les conditions imposées.

Pour la solution de ce problème nous attachons à chaque projet j ($j = 1, 2, \ldots, n$) une inconnue x_j qui prendra la valeur 1 si le projet est mis à l'exécution et la valeur 0 dans le cas contraire.

Le problème sera traduit maintenant comme suit : trouver le maximum de la fonction

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

les variables bivalentes $x_1, \ldots, x_n$ étant soumises aux conditions restrictives

$$\sum_{j=1}^{n} I_j x_j \leqslant S$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \geqslant \pi$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leqslant V$$

Supposons, par exemple, que les données du problème soient celles du tableau 1

Tableau 1

Projets / Données	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_j	6	8	3	7	10	9	9	10	11	7
I_j	5	4	4	4	7	8	6	7	10	4
π_j	10	3	6	5	4	7	4	8	12	8
V_j	3	2	0	2	0	0	0	3	4	0

On indique également le fond d'investissement $S = 40$, la production obligatoire $\pi = 45$, le quantum de devises permis $V = 10$.

On voit qu'il existe au total $2^{10} = 1024$ variantes.

La résolution du problème à l'aide d'une des méthodes qui seront esquissées dans ce travail nous conduit à la conclusion que la solution la plus favorable assure un bénéfice de 57 unités et consiste dans la réalisation des projets 1, 2, 4, 5, 6, 8, et 10, les projets 3, 7, 9 étant abandonnés.

L'analyse de la structure du problème ci-dessus nous permet de faire les observations suivantes :

— Le nombre total de variantes qui auraient dû être examinées dans le cas d'une énumération de toutes les possibilités est $2^{10} = 1024$. Ce nombre n'étant pas prohibitif, le problème aurait pu être résolu par des moyens élémentaires. Toutefois, dans les problèmes réels, le nombre des variables peut facilement atteindre l'ordre des centaines, ce qui fait que le nombre de variantes dépasse les possibilités de l'emploi efficient d'un calculateur électronique quelconque.

— Le problème donné dans l'exemple revenait, au fond, à la solution d'un problème de programmation linéaire en nombres entiers. Il existe divers algorythmes pour la solution des problèmes de ce type.

Exemple 2. S. Vajda [2] examine le problème suivant :

Dans une certaine région géographique fonctionnent n postes émetteurs de télévision sur m chaînes. Il est évident que les chaînes sur lesquelles émettent les diverses stations doivent être chosies de façon à ce que les stations ayant des zones d'émission communes fonctionnent sur des chaînes différentes.

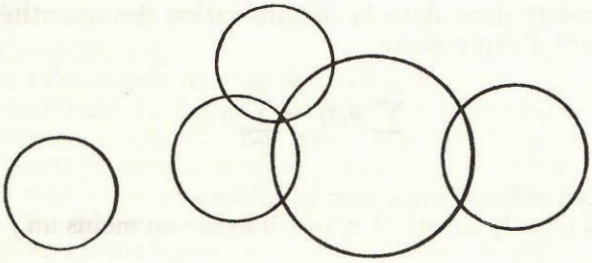


Fig. 1

Le premier problème qui se pose est la détermination de l'attribution des chaînes aux postes émetteurs.

Supposons, toutefois, qu'après un certain laps de temps un nouvel émetteur $(n + 1)$ entre en fonction. Le problème se pose alors comme suit : comment redistribuer les chaînes aux postes émetteurs pour que le nombre des postes changeant la chaîne d'émission soit minimum.

Désignant par $i = 1, \ldots, n$ les postes émetteurs, par $j = 1, \ldots, m$ les chaînes, posant $v_{ik} = 1$ s'il existe une région où fonctionnent les deux postes émetteurs i et k et $v_{ik} = 0$ dans le cas contraire; $a_{ij} = 1$ si, au début du processus, l'émetteur i fonctionne sur la chaîne j et $a_{ij} = 0$ dans le cas contraire; finalement, $x_{ij} = 1$ si, après l'entrée en fonction du nouvel émetteur

$(n+1)$ la station i émet sur la chaîne j et $x_{ij} = 0$ dans le cas contraire ; nous arrivons au problème suivant :

Déterminer les inconnues bivalentes x_{ij} maximisant la fonction

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$$

et satisfaisant aux conditions :

$$\sum_{j} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leqslant 1 + v_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n+1)$$

La fonction à maximiser nous indique le nombre d'émetteurs ne changeant pas de chaîne d'émission.

Exemple 3. M. CARVALLO présente dans [1] le problème suivant : La fabrication de n produits différents 1, 2, ..., n nécessite l'emploi de m machines 1, 2, ..., m ; plus exactement, posons $a_{ij} = 1$ si la fabrication du produit i nécessite l'emploi de la machine j et $a_{ij} = 0$ dans le cas contraire. Indiquons par p_i le prix de vente de la quantité de produit i fabriqué dans un laps de temps donné et par q_j le coût de l'emploi de la machine j au cours de la période respective.

Posons $x_i = 1$ si le produit i est fabriqué et $x_i = 0$ dans le cas contraire. Posons $y_j = 1$ si la machine j est employée lors du processus respectif de production et $y_j = 0$ dans le cas contraire.

Le problème de la détermination du plan devant assurer le maximum du bénéfice consiste donc dans la détermination des quantités bivalentes x_i et y_j maximisant l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{j=1}^{m} q_j y_j$$

et satisfaisant en même temps aux conditions :
"quel que soit i $(i = 1, \ldots, n)$, si $x_i = 1$ il existe au moins un j $(j = 1, \ldots, m)$, tel que

$$a_{ij} = 1 \text{ et } y_j = 1''.$$

Le problème peut encore être formulé comme suit :

Déterminer les valeurs des variables bivalentes (0, 1) x_i, satisfaisant aux conditions

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j - x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et maximisant, dans ces conditions, l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{j=1}^{m} q_j y_j$$

§ 2. *SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET D'INÉGALITÉS LINÉAIRES À VARIABLES BIVALENTES.*

Le but du présent paragraphe est de décrire une méthode de détermination systématique de toutes les solutions d'un système d'équations et d'inégalités linéaires à variables bivalentes (0 ou 1). La nécessité de résoudre ce problème résulte, d'une part, du fait que le modèle mathématique de certains processus économiques représente un tel système et, d'autre part, du fait que la méthode décrite au § 3 pour la solution des programmes linéaires bivalents est basée sur la connaissance des „familles de solutions" des restrictions.

Prenons d'abord une inégalité linéaire de la forme

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geqslant b \tag{1}$$

Si nous remplaçons chaque variable x_i pour laquelle $c_i < 0$ par $1 - x_i$, si nous désignous, après cette transformation, les nouvelles variables par X_i (égale à x_i si $c_i > 0$ et égale à $\bar{x}_i = 1 - x_i$ si $c_i < 0$), le terme libre par d et si nous réordonnons les variables, l'inégalité (1) peut être ramenée à la forme

$$c_1X_1 + \ldots + c_nX_n \geqslant d \tag{2}$$

où

$$c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_n \geqslant 0. \tag{3}$$

Une solution $S^* = (X_1^*, \ldots, X_n^*)$ de (2) s'appelera *solution de base* si, pour chaque i avec $X_i^* = 1$, le vecteur$(X_1^*, \ldots, X_{i-1}^*, 0, X_{i+1}^*, \ldots X_n^*)$ n'est pas une solution de l'inégalité (2).

Désignons par I l'ensemble de tous les indices i pour lesquels $X_i^* = 1$ et J par un ensemble contenant I : $J \supseteq I$. Nous désignerons par $F(S^*, J)$ l'ensemble de tous les vecteurs $S = (X_1, \ldots, X_n)$ avec la propriété que $X_j = 1$ pour tous les $j \in J$ les autres composantes X_k, $k \in J$, étant arbitraires : 0 ou 1). Il est évident que tout vecteur $S \in F(S^*, J)$ est une solution de (2). L'ensemble $F(S^*, J)$ sera dénommée *une famille* de solutions de (2).

Pour déterminer toutes les solutions de base de l'inégalité (2), on répètera l'application des règles suivantes :

1° Si $d \leqslant 0$, la seule solution de base est $X_1 = \ldots \ldots = X_n = 0$).

2° Si $d > 0$ et $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_p \geqslant d > c_{p+1} > \ldots > c_n$, alors :

2α) pour tout $k = 1, \ldots, p$, le vecteur $X_k = 1$, $X_j = 0$ $(j \neq k)$ est une solution de base :

2β) on doit chercher les autres solutions de base parmi les vecteurs satisfaisant à $X_1 = \ldots = X_p = 0$ et $\sum_{j=p+1}^{n} c_jX_j \geqslant d$.

3°. Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $\sum_{i=1}^{n} c_i < d$ il n'existe pas de solutions.

4°. Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i = 1, ..., n)$ et $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$, la seule solution (de base) est $X_1 = ... = X_n = 1$.

5°. Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i = 1, ..., n)$, $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ et $\sum_{j=2}^{n} c_j < d$, on doit chercher les solutions de base parmi les vecteurs satisfaisant à $X_1 = 1$ et $\sum_{j=2}^{n} c_j X_j \geqslant d - c_1$.

6°. Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i = 1, ..., n)$, $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ et $\sum_{j=2}^{n} c_j \geqslant d$, on doit étudier séparément les cas :

$6\gamma_1$) $$X_1 = 1 \text{ et, } \sum_{j=2}^{n} c_j X_j \geqslant d - c_1$$

et

$6\gamma_2$) $$X_1 = 0 \text{ et } \sum_{j=2}^{n} c_j X_j \geqslant d.$$

Soit $S_k^* = (X_{k1}^*, ..., X_k^{*n})$ $(k = 1, ..., K)$ toutes les solutions de base de l'inégalité (2). Pour chaque k désignons par $u(k)$ le dernier indice pour lequel la composante correspondante de S_k^* est égale à 1 :

$$X_{k,u(k)}^* = 1, \quad X_{k,v}^* = 0 \quad (v > u(k)). \tag{4}$$

Soit $J_k = \{1, 2 ..., u(k)\}$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Les familles de solutions* $F(S_k^*, J_k)$ $(k = 1, ... K)$ *contiennent toutes les solutions de l'inégalité* (2) *et sont deux à deux disjointes*

Exemple 4. Pour résoudre l'inégalité

$$-x_1 + 7x_2 + 7\bar{x}_3 - 2x_4 - 9\bar{x}_5 + 3x_6 \geqslant 9. \tag{5}$$

posons $X_1 = x_5$, $X_2 = x_2$, $X_3 = \bar{x}_3$, $X_4 = x_6$, $X_5 = \bar{x}_4$, $X_6 = \bar{x}_1$, d'où nous obtenons

$$9X_1 + 7X_2 + 7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geqslant 21. \tag{6}$$

L'inégalité se trouve dans le cas 5° ci-dessus ; nous devons donc prendre $X_1 = 1$. Nous obtenons l'inégalité

$$7X_2 + 7\ X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geqslant 12, \tag{7}$$

qui se trouve dans le cas 6° ; par conséquent, nous devons étudier séparément les cas où $X_2 = 1$ et $X_2 = 0$.

Si nous prenons $X_2 = 1$ nous obtenons l'inégalité

$$7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geqslant 5, \tag{8}$$

laquelle — étant dans le cas 2° — admet la solution de base $X_3 = 1, X_4 = X_5 = X_6 = 0$; il nous reste à étudier le cas $X_3 = 0$,

$$3X_4 + 2X_5 + X_6 \geqslant 5; \tag{9}$$

si nous appliquons deux fois les conclusions du cas 5°, nous déduisons que (9) a l'unique solution de base $X_4 = X_5 = 1$, $X_6 = 0$.

Si nous prenons $X_2 = 0$, dans (7) nous obtenons l'inégalité

$$7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geqslant 12; \tag{10}$$

l'application répétée des conclusions du cas 5° nous montre que l'unique solution de base de (10) est $X_3 = X_4 = X_5 = 1$, $X_6 = 0$.

Par conséquent, l'inégalité (6) a les trois solutions de base ci-dessous :

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0

Par conséquent, nous avons $J_1 = \{1, 2, 3\}$ et $J_2 = J_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Si nous revenons à l'inégalité initiale (5), nous trouvons le tableau des familles de solutions ci-dessous :

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	—	1	0	—	1	—
2	—	1	1	0	1	1
3	—	0	0	0	1	1

Ici „—“ indique les variables arbitraires de la famille.

* * *

La méthode ci-dessus peut être également employée à la solution d'un système d'équations et d'inégalités linéaires à variables bivalentes. L'algorithme proposé aura trois étapes :

Etape 1. Remplacement de chaque inégalité de la forme $f > 0$ par $f - 1 \geqslant 0$; de chaque inégalité de la forme $g < 0$ par $-g - 1 \geqslant 0$; de chaque inégalité de la forme $h \leqslant 0$ par $-h \geqslant 0$ et de chaque équation $e = 0$ par la paire d'inégalités $e \leqslant 0$ et $e \geqslant 0$; nous obtenons ainsi un système ne contenant que des inégalités de la forme $F \geqslant 0$.

Etape 2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ les inconnues du système. En employant les relations $\bar{x}_i = 1 - x_i$ et $x_j = 1 - \bar{x}_j$, nous pouvons exprimer chaque inégalité du système sous la forme :

$$c^i_{i_1}\tilde{x}_{i_1} + c^i_{i_2}\tilde{x}_{i_2} + \ldots + c^i_{i_m}\tilde{x}_{i_m} \geqslant d^i \qquad (11)$$

où $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ sont celles des variables $x_1, \ldots, x_n$ dont dépend effectivement l'inégalité respective ; $\tilde{x}$ est x ou $\bar{x}$, de sorte que $c^i_{i_1} \geqslant c^i_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c^i_{i_m} > 0$.

Etape 3. Elle est basée sur l'idée suivante : chaque inégalité, prise séparément, est exprimée sous forme canonique par rapport aux variables $\tilde{x}$ qu'elle contient, de sorte que les conclusions ci-dessus, se référant à une inégalité, permettent de déduire les conclusions se référant au système tout entier.

Ainsi, lorsqu'une certaine inégalité du système n'a pas de solutions, le système tout entier est incompatible. De même, quand toutes les solutions d'une certaine inégalité ont certaines variables fixées, $x_{i_1} = x^*_{i_1}, \ldots, x_{i_m} = x^*_{i_m}$, les variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ de n'importe quelle solution du système (lorsque le système est compatible) doivent avoir les valeurs fixées ci-dessus.

Nous donnons ci-dessous une liste de conclusions se référant à l'inégalité linéaire

$$\sum_{j=1}^{m(i)} c^i_{i_j}\tilde{x}_{i_j} \geqslant d^i$$

du système étudié. Une application successive de ces conclusions permet d'obtenir les solutions du système initial, groupées en ensembles *disjoints*.

1°. Si $d^i \leqslant 0$, l'inégalité est redondante et peut donc être éliminée du système.

2°. Si $d^i > 0$, $c^i_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant c^i_{i_p} \geqslant d > c^i_{i_{p+1}} \geqslant \ldots \geqslant c^i_{i_{m(i)}}$ il y a les $p+1$, possibilités $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta$, suivantes :

α_k) $\tilde{x}_{i_1} = \ldots = x_{i_{k-1}} = 0$, $\tilde{x}_{i_k} = 1$ $(k = 1, \ldots, p)$ sont les solutions de base de l'inégalité (11).

β). On doit chercher les autres solutions (de base) de l'inégalité (11) parmi les vecteurs satisfaisant à

$$\tilde{x}_{i_1} = \ldots = \tilde{x}_{i_p} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=p+1}^{m(i)} c^i_{i_j}\tilde{x}_{i_j} \geqslant d^i$$

3°. Si $d^i > 0$, $c^i_{i_j} < d^i$ $(j = 1, \ldots, m(i))$ et $\sum_{j=1}^{m(i)} c^i_{i_j} < d^i$ alors l'inégalité, et par suite le système, sont incompatibles.

4°. Si $d^i > 0$, $c^i_{i_j} < d^i (j = 1, \ldots, m)$ $\sum_{j=1}^{m(i)} c^i_{i_j} = d^i$ alors toutes les variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m(i)}}$ ont la valeur fixée 1.

5°. Si $d^i > 0$, $c^i_{i_1} < d^i (j = 1, \ldots, m(i))$, $\sum_{j=1}^{m(i)} c^i_{i_j} > d^i$, et $\sum_{j=2}^{m(i)} c^i_{i_j} < d^i$, alors la

variable $\tilde{x}_{i_1}$ a la valeur 1 tandis que les autres variables satisfont à l'inégalité $\sum_{j=2}^{m(i)} c^i_{i_j} \tilde{x}_{i_j} \geqslant d^i - c^i_{i_1}$.

6°. Si $d^i > 0$, $c^i_{i_j} < d^i (j = 1, 2, \ldots m)$, $\sum_{j=1}^{m} c^i_{i_j} > d^i$ et $\sum_{j=2}^{m} c^i_{i_j} \geqslant d^i$, il y a deux possibilités :

γ1) La variable $\tilde{x}_{i_1} = 1$ et les autres variables satisfont à l'inégalité

$$\sum_{j=2}^{m(i)} c^i_{i_j} \tilde{x}_{i_j} \geqslant d^i - c^i_{i_j};$$

γ2) La variable $\tilde{x}_{i_1} = 0$ et les autres variables satisfont à l'inégalité

$$\sum_{j=2}^{m(i)} c_{i_j} \tilde{x}_{ij} \geqslant d^i.$$

Comme l'on peut voir, il y a des cas où certaines variables sont fixées (*4°*, *5°*) ; un cas (*3°*) où le système n'a pas de solutions ; un autre (*1°*) où l'inégalité étudiée est redondante ; tous ces cas seront nommés „déterminés". Il y a le cas *6°* où, pratiquement, nous ne disposons d'aucune information et nous sommes, par conséquent, obligés de séparer la discussion en deux sous cas ; nous appellerons ce cas „indéterminé". Enfin, il y a le cas *2°* où la discussion doit être séparée en $p + 1$ cas, à information croissante ; ce cas se nommera „partiellement déterminé". Nous donnons cette classification dans le tableau ci-dessous :

Ordre préférentiel	cas	Caractéristique
1	*1°*, *3°*, *4°*, *5°*	Déterminé
2	*2°*	Partiellement déterminé
3	*6°*	Indéterminé

La troisième étape du procédé de résolution des systèmes d'inégalités linéaires continue comme suit :

Lorsque certaines inégalités appartiennent à des cas déterminés, nous en tirons toutes les conclusions possibles et les confrontons. Deux situations peuvent se présenter : s' il y a une égalité irrésoluble ou si les deux inégalités différentes conduisent aux conclusions incompatibles $\tilde{x}_j = 1$ et $\tilde{x}_i = 0$, le système est incompatible. Dans les autres cas les valeurs de certaines variables sont déterminées, ce qui nous conduit à un système de dimensions plus petites qui sera analysé ultérieurement.

Si aucune des inégalités ne se trouve dans des cas déterminés, mais il existe des inégalités dans des cas partiellement déterminés, nous suivrons les conclusions correspondant à l'une des inégalités de ces cas. Il semble avantageux de choisir l'inégalité où p est le plus grand.

Enfin, si toutes les inégalités se trouvent dans des cas indéterminés, nous devons bifurquer la discussion par rapport à l'une des variables ; il semble avantageux de choisir la variable ayant le plus grand coefficient dans le système.

Nous avons le

THÉORÈME 2. Le procédé ci-dessus conduit à toutes les solutions du système analysé d'inégalités linéaires aux variables bivalentes.

Il va de soi que la méthode ci-dessus peut être enrichie de règles supplémentaires permettant d'accélérer les calculs. Toutefois dans l'exemple ci-dessous nous nous sommes abstenus sciemment d'employer certaines observations directes (donc accélératrices), afin d'illustrer exclusivement l'essence du procédé.

Observation. Les familles de solutions obtenues par la méthode décrite ci-dessus correspondent à des arcs disjoints dans l'arbre associé et, par conséquent, elles sont disjointes deux à deux.

Exemple 5. Considérons le système :

$$x_1 - 3x_2 + 12x_3 + x_5 - 7x_6 + x_7 - 3x_{10} + 5x_{11} + x_{12} - 6 \geqslant 0, \quad (12.1)$$

$$-3x_1 + 7x_2 - x_4 - 6x_5 + 1 \geqslant 0, \quad (12.2)$$

$$-11x_1 - x_3 + 7x_4 + x_6 - 2x_7 - x_8 + 5x_9 - 9x_{11} - 4 \geqslant 0 \quad (12.3)$$

$$-5x_2 - 6x_3 + 12x_5 - 7x_6 - 3x_8 - x_9 + 8x_{10} - 5x_{12} + 8 \geqslant 0, \quad (12.4)$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_8 - 7x_9 - x_{10} + 7x_{12} - 7 \geqslant 0, \quad (12.5)$$

$$2x_1 + 4x_4 + 3x_7 + 5x_8 + x_9 - x_{11} - x_{12} - 4 \geqslant 0 \quad (12.6)$$

que l'on peut ramener à la forme équivalente

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_2 + 3\bar{x}_{10} + x_1 + x_5 + x_7 + x_{12} \geqslant 19, \quad (13.1)$$

$$7x_2 + 6\bar{x}_5 + 3\bar{x}_1 + \bar{x}_4 \geqslant 9, \quad (13.2)$$

$$11\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 + \bar{x}_8 \geqslant 28, \quad (13.3)$$

$$12x_5 + 8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 6\bar{x}_3 + 5\bar{x}_2 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geqslant 19, \quad (13.4)$$

$$8x_6 + 7x_1 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 5x_3 + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + x_2 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 19, \quad (13.5)$$

$$5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + 2x_1 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geqslant 6. \quad (13.6)$$

L'inégalité (13.3) se trouve dans le cas 5° et implique $\bar{x}_1 = 1$, c'est-à-dire $x_1 = 0$. Si nous introduisons cette valeur dans le système nous observons qu'aucune inégalité ne se trouve dans un cas déterminé quelconque ;

la relation (13.2) se réduit à

$$7x_2 + 6\bar{x}_5 + \bar{x}_4 \geqslant 6$$

qui se trouve dans le cas *2°*. Il faut donc considérer les trois alternatives suivantes :

$\alpha_1)$ $x_2 = 1$

$\alpha_2)$ $x_2 = 0,\ \bar{x}_5 = 1,$

$\beta)$ $x_2 = \bar{x}_5 = 0$ et $\bar{x}_4 \geqslant 6,$ ce qui est impossible ; donc on élimine cette alternative.

Commençons par l'alternative α_1, qui implique la vérification de l'inégalité (13.2) et $x_1 = 0,\ x_2 = 1$; ces valeurs réduisent l'inégalité (13.1) à

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_{10} + x_5 + x_7 + x_{12} \geqslant 19,$$

qui se trouve dans le cas 5° et implique $x_3 = 1$.

Les valeurs $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ réduisent (13.3) à l'inégalité

$$9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + x_6 + \bar{x}_8 \geqslant 17$$

qui se trouve de nouveau dans le cas *5°* et implique $\bar{x}_{11} = 1$. L'inégalité (13.1) est réduite maintenant à

$$7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_5 + x_7 + x_{12} \geqslant 7$$

qui appartient encore au cas *5°* et implique $\bar{x}_6 = 1$. L'inégalité (13.1) devient une identité et, par conséquent, le système (13) est réduit à :

$$x_1 = x_6 = x_{11} = 0, \quad x_2 = x_3 = 1, \tag{14.0}$$

$$7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_8 \geqslant 8, \tag{14.3}$$

$$12x_5 + 8x_{10} + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geqslant 12 \tag{14.4}$$

$$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 13 \tag{14.5}$$

$$5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{12} \geqslant 5 \tag{14.6}$$

Les inégalités (14.4) et (14.6) se trouvent dans le cas *2°*, alors que (14.3) et (14.5) appartiennent au cas *6°*. Effectuons la bifurcation résultant de (14.6) :

$\alpha')$ $x_8 = 1,$

$\beta)$ $x_8 = 0$ et $4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{12} \geqslant 5.$

Dans l'alternative α', l'inégalité (14.3) est réduite à

$$7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 \geqslant 8,$$

qui se trouve dans le cas 5° et implique $x_4 = 1$. Par conséquent, (14.5) devient

$$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 11,$$

donc (cas 5°) $\bar{x}_9 = 1$ et

$$7x_{12} + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 4$$

impliquant $x_{12} = 1$, toujours d'après la conclusion du cas 5°. A présent, (14.3) devient $2\bar{x}_7 \geqslant 1$, donc $\bar{x}_7 = 1$; ensuite, (14.4) est réduit à

$$12x_5 + 8x_{10} \geqslant 11$$

et implique $x_5 = 1$. Ces valeurs satisfont au système (14) et montrent que nous avons trouvé les solutions suivantes de (13) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 0, \quad x_8 = 1,$$

$$x_9 = 0, \quad x_{10} \text{ arbitraire}, \quad x_{11} = 0, \; x_{12} = 1. \tag{15}$$

Dans l'alternative β', l'inégalité (14.5) devient

$$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 13,$$

donc $\bar{x}_9 = 1$ et

$$7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 6.$$

Nous devons prendre $x_{12} = 1$, autrement nous obtiendrions une inégalité incompatible. Ensuite, (14.6) devient

$$4x_4 + 3x_7 \geqslant 5$$

et implique $x_4 = 1$ et $3x_7 \geqslant 1$, donc $x_7 = 1$. A présent, les inégalités (14.3) (14.5) et (14.6) sont vérifiées, de sorte que le système (14) est réduit à (14.4) qui devient

$$12x_5 + 8x_{10} \geqslant 8.$$

Cette égalité se résout en prenant soit $x_5 = 1$, soit $x_5 = 0$ et $x_{10} = 1$. On obtient les solutions suivantes du système (13) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1, \quad x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0, \quad x_{10} \text{ arbitraire} \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1, \tag{16}$$

et

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1,$$

$$x_8 = 0, \quad x_9 = 0, \quad x_{10} = 1, \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1. \tag{17}$$

Il reste à étudier l'alternative α_1 :

$$x_1 = x_2 = x_5 = 0 \tag{17.0}$$

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geqslant 16, \tag{17.1}$$

$$9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 + \bar{x}_8 \geqslant 17, \tag{17.3}$$

$$8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 6\bar{x}_3 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geqslant 14, \tag{17.4}$$

$$8x_6 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 5x_3 + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + \bar{x}_{10} \leqslant 18, \tag{17.5}$$

$$5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geqslant 6. \tag{17.6}$$

Etant donné que toutes ces inégalités se trouvent dans le cas *6°*, nous devrons faire une bifurcation; nous bifurquerons suivant la variable x_8, c'est-à-dire γ_1) $x_8 = 1$ et γ_2) $x_8 = 0$.

Dans l'alternative γ_1) nous avons $x_8 = 1$ et (17.3) est réduit à

$$9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 \geqslant 17,$$

qui se trouve dans le cas *5°* et implique $\bar{x}_{11} = 1$. Puis (17.1) se transforme en

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geqslant 16$$

et entraîne $x_3 = 1$. L'inégalité (17.4) devient

$$8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 5\bar{x}_{12} + \bar{x}_9 \geqslant 14$$

impliquant ainsi $x_{10} = 1$; donc (17.1) devient

$$7\bar{x}_6 + x_7 + x_{12} \geqslant 4.$$

Etant donné que $\bar{x}_6 = 0$ impliquerait $x_7 + x_{12} \geqslant 4$, il faut prendre $\bar{x}_6 = 1$; l'inégalité (17.1) est ainsi vérifiée.
A présent (17.3) devient

$$7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 \geqslant 8$$

et implique $x_4 = 1$; ensuite, l'inégalité (17.5) est réduite à

$$7\bar{x}_9 + 7x_{12} \geqslant 11,$$

et implique $\bar{x}_9 = 1$ et $7x_{12} \geqslant 4$, donc $x_{12} = 1$. De même, (17.1) est réduit à $2\bar{x}_7 \geqslant 1$, donc $\bar{x}_7 = 1$. Les valeurs ainsi établies satisfont au système (17), d'où il résulte que nous avons trouvé la solution ci-dessous du système (13) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 0,$$
$$x_8 = 1, \quad x_9 = 0, \quad x_{10} = 1, \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1. \tag{18}$$

Dans l'alternative γ_2 toutes les inégalités (17) se trouvent dans le cas 6° ; nous bifurquerons la discussion par rapport à x_{11} c'est-à-dire :

$$\gamma_1') \; x_8 = 0, \; x_{11} = 1 \text{ et } \gamma_2') \; x_8 = x_{11} = 0.$$

Dans l'alternative γ_1' l'inégalité (17.3) devient

$$7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 \geqslant 16,$$

et implique $x_4 = x_9 = \bar{x}_7 = \bar{x}_3 = x_6 = 1$, de sorte que (17.1) est réduite à l'inégalité

$$3\bar{x}_{10} + x_{12} \geqslant 11,$$

qui est incompatible.
Il nous reste à étudier l'alternative γ_2', où (17.1) est réduite à

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 3x_{10} + x_7 + x_{12} \geqslant 16,$$

et implique $x_3 = 1$. Par conséquent, le systéme (17) devient :

$$x_1 = x_2 = x_5 = x_8 = x_{11} = 0, \quad x_3 = 1, \tag{18.0}$$

$$7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geqslant 4, \tag{18.1}$$

$$7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + x_6 + \bar{x}_8 \geqslant 8, \tag{18.3}$$

$$8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 5\bar{x}_{12} + \bar{x}_9 \geqslant 11, \tag{18.4}$$

$$8x_6 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geqslant 13 \tag{18.5}$$

$$4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geqslant 6 \tag{18.6}$$

Si $x_6 = 1$, (18.1) devient

$$3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geqslant 4,$$

donc $\bar{x}_{10} = 1$, alors que (18.4) est réduite à

$$8x_{10} + 5\bar{x}_{12} + \bar{x}_9 \geqslant 11,$$

et implique $x_{10} = 1$. Contradiction.

Si $x_6 = 0$, l'inégalité (18.5) se réduit à

$$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geqslant 13,$$

et implique $\bar{x}_9 = 1$ et

$$7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geqslant 6,$$

donc $x_{12} = 1$. La relation (18.3) devient

$$7x_4 + 2\bar{x}_7 \geqslant 7,$$

et, par conséquent, $x_4 = 1$, alors que (18.4) est réduite à $8x_{10} \geqslant 3$ et implique $x_{10} = 1$. Puis, (18.6) se transforme en $3x_7 \geqslant 1$, soit $x_7 = 1$. Ces valeurs satisfont au système (18) de sorte que nous avons ainsi obtenu la dernière solution du système (13) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1,$$

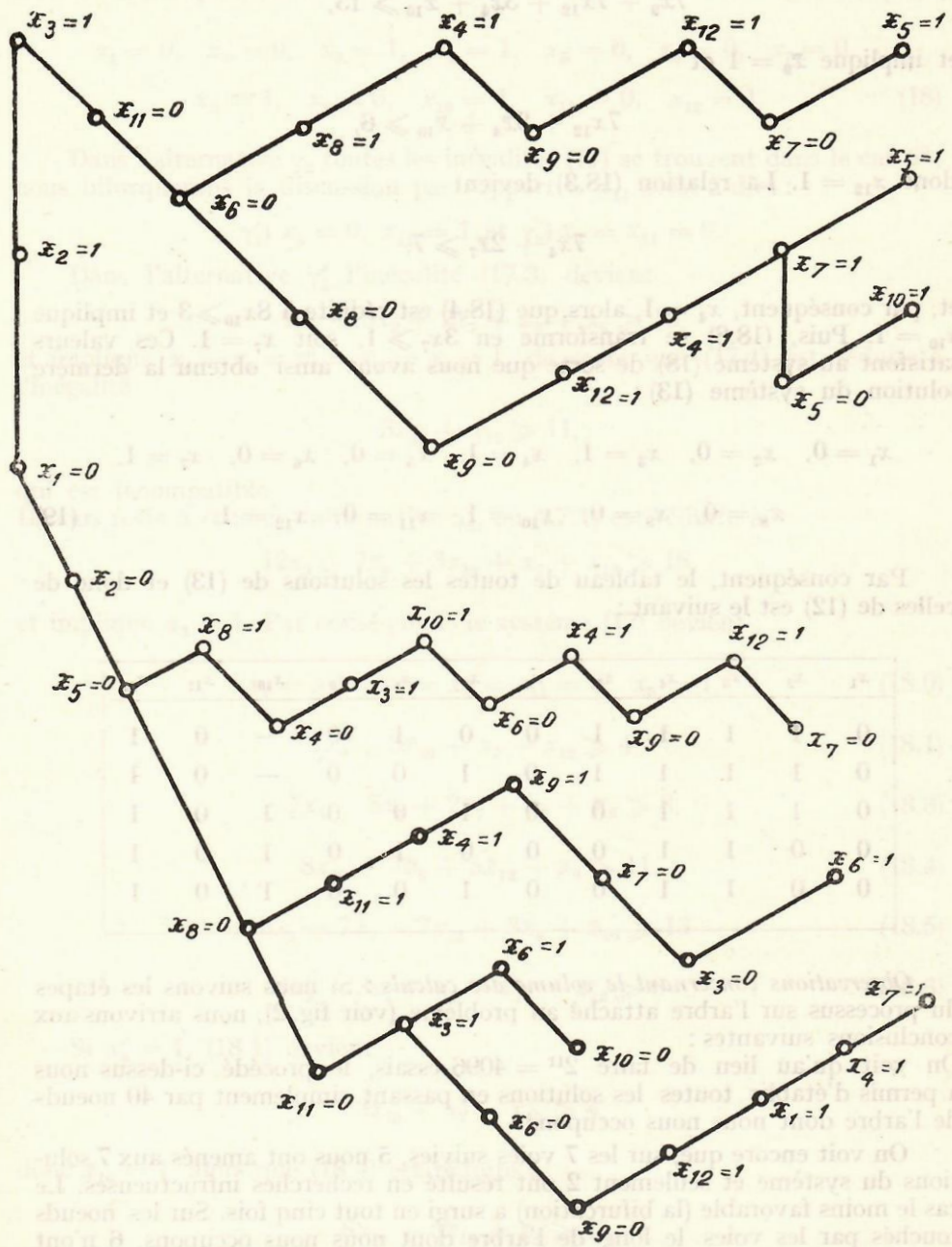
$$x_8 = 0, \quad x_9 = 0, \quad x_{10} = 1, \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1. \tag{19}$$

Par conséquent, le tableau de toutes les solutions de (13) et donc de celles de (12) est le suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
0	1	1	1	1	0	0	1	0	—	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	0	—	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1

Observations concernant le volume des calculs : Si nous suivons les étapes du processus sur l'arbre attaché au problème (voir fig. 2), nous arrivons aux conclusions suivantes :
On voit qu'au lieu de faire $2^{11} = 4096$ essais, le procédé ci-dessus nous a permis d'établir toutes les solutions en passant simplement par 40 noeuds de l'arbre dont nous nous occupons.

On voit encore que, sur les 7 voies suivies, 5 nous ont amenés aux 7 solutions du système et seulement 2 ont résulté en recherches infructueuses. Le cas le moins favorable (la bifurcation) a surgi en tout cinq fois. Sur les noeuds touchés par les voies le long de l'arbre dont nous nous occupons, 6 n'ont pas eu besoin d'examen, nous permettant ainsi de passer directement aux noeuds suivants.


$x_3=1$
$x_{11}=0$
$x_4=1$
$x_8=1$
$x_9=0$
$x_{12}=1$
$x_7=0$
$x_5=1$
$x_6=0$
$x_2=1$
$x_8=0$
$x_5=1$
$x_7=1$
$x_{10}=1$
$x_4=1$
$x_{12}=1$
$x_5=0$
$x_9=0$
$x_1=0$
$x_2=0$
$x_8=1$
$x_{10}=1$
$x_4=1$
$x_{12}=1$
$x_5=0$
$x_3=1$
$x_4=0$
$x_6=0$
$x_9=0$
$x_7=0$
$x_9=1$
$x_4=1$
$x_7=0$
$x_6=1$
$x_{11}=1$
$x_8=0$
$x_3=0$
$x_6=1$
$x_7=1$
$x_3=1$
$x_{10}=0$
$x_4=1$
$x_{11}=0$
$x_1=1$
$x_6=0$
$x_{12}=1$
$x_9=0$

On effectue sans aucune difficulté la minimisation d'une fonction linéaire à variables bivalentes

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{20}$$

En effet, on obtient les points du minimum en mettant

$$x_i^* = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_i < 0 \\ 0 & \text{si} \quad c_i > 0 \\ p_i & \text{si} \quad c_i = 0 \end{cases} \tag{21}$$

où p_i est un paramètre arbitraire (0,1).

Exemple 6. Il est évident que les points de minimum de la fonction linéaire à variables bivalentes

$$2 + 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_6 - x_7 \tag{22}$$

sont

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \; x_4 = p_4, \quad x_5 = p_5, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1, \tag{23}$$

où p_4 et p_5 sont des paramètres arbitraires (0, 1). Donc la valeur minimum de (22) est -6.

On peut effectuer d'une façon similaire la minimisation d'une fonction linéaire à variables bivalentes

$$\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(X) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n, \tag{24}$$

dont les variables sont soumises à certaines inégalités linéaires.

Plus précisément, les méthodes comprendront trois étapes :

1. Détermination des solutions du système des restrictions groupées en familles de solutions $F_1, \ldots, F_p$.

2. Pour chaque famille de solutions F_k, détermination de la valeur

$$\min_{X \in F_k} f(X) \tag{25}$$

et les points $X^\circ \in F_k$ pour lesquels

$$f(X^\circ) = \min_{X \in F_k} \mathrm{f(X)}. \tag{26}$$

3. Détermination (par vérification directe) de la valeur

$$\min_{k=1, \ldots, p} \; \min_{X \in F_k} f(X). \tag{27}$$

et les points X^* pour lesquels

$$f(X^*) = \min_{k=1,\ldots,p} \min_{X \in F_k} f(X) \tag{28}$$

Il nous reste maintenant à indiquer la manière d'effectuer l'étape 2.

Les vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_n)$ appartenant à une famille de solutions F_k se caractérisent par le fait que les valeurs x_i sont fixées pour les indices i contenus dans un ensemble donné d'indices I_k.

$$i \in I_k \text{ implique } x_i = x_i^* = \text{fixé } (0,1), \tag{29}$$

alors que x_i reste arbitraire pour $i \notin I_k$.

En raisonnant comme ci-dessus, on voit facilement que les points X° satisfaisant à (26) sont fournis par les formules suivantes

$$x_i = \begin{cases} x_i^*, & \text{si } i \in I_k \\ 1, & \text{si } i \notin I_k \text{ et } c_i < 0, \\ 0, & \text{si } i \notin I_k \text{ et } c_i > 0, \\ p_i & \text{si } i \notin I_k \text{ et } c_i = 0, \end{cases} \tag{30}$$

où p_i sont des paramètres arbitraires dans l'ensemble (0,1).

Exemple 7. Minimiser la fonction

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_7 + 4x_{10} + x_{11} - 3x_{12}, \tag{31}$$

sous les conditions (12) du paragraphe précédent.

En remplaçant, dans le tableau des solutions, les petites lignes indiquant le fait que certaines variables étaient arbitraires dans une famille donnée, par les valeurs de ces variables données par (30), nous obtenons :

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	Valeur de (31)
1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	−6
2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	−4
3	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	+1
4	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	+4
5	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	+6

Donc le minimum cherché est —6 et le point du minimum est

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 0,$$
$$x_8 = 1, \quad x_9 = 0, \quad x_{10} = 0, \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1. \tag{32}$$

Exemple 8. Minimiser la fonction :

$$2 + 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 4x_6 \tag{33}$$

sous les conditions

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 2x_5 - x_6 \leqslant 2 \tag{34.1}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 - x_5 - 3x_6 \geqslant 4 \tag{34.2}$$

On peut déterminer les familles de solutions du système (34) comme dans le paragraphe précédent et l'on obtient :

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	—	—	0	1	—	—
2	—	1	1	1	—	—
3	0	0	1	1	0	—
4	0	0	1	1	1	1
5	1	0	1	1	0	1
6	1	1	0	0	—	0
7	1	0	0	0	0	0

où les petits traits indiquent que les variables respectives sont arbitraires.

En introduisant dans ce tableau, au lieu des petits traits, les valeurs données par (30), nous obtenons :

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (33)
1	0	1	0	1	p_1	0	2
2	0	1	1	1	p_2	0	**−3**
3	0	0	1	1	0	0	−1
4	0	0	1	1	1	1	3
5	1	0	1	1	0	1	6
6	1	1	0	0	p_6	0	3
7	1	0	0	0	0	0	5

Par conséquent, le minimum cherché est -3, étant atteint aux points (0, 1, 1, 1, 0, 0) et (0, 1, 1, 1, 1, 0).

Si, au lieu de la minimisation d'une fonction linéaire à variables bivalentes soumises à des conditions linéaires, nous nous intéressons à un problème analogue de maximisation, le procédé ci-dessus reste valable en entier,

avec la seule différence que le rôle de la formule (30) sera joué par la formule

$$x_i = \begin{cases} x_i^* \text{ si } i \in I_k \\ 0 \text{ si } i \notin I_k \text{ et } c_i > 0 \\ 1 \text{ si } i \notin I_k \text{ et } c_i < 0 \\ p_i \text{ si } i \notin I_k \text{ et } c_i = 0 \end{cases} \tag{35}$$

Exemple 9. Maximiser la fonction (33) avec les conditions (34) de l'exemple précédent.

En raisonnant comme ci-dessus, nous obtenons le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (33)
1	1	0	0	1	—	1	11
2	1	1	1	1	—	1	4
3	0	0	1	1	0	1	3
4	0	0	1	1	1	1	3
5	1	0	1	1	0	1	6
6	1	1	0	0	—	0	3
7	1	0	0	0	0	0	5

Donc le maximum cherché est 11 et se trouve réalisé aux points (1, 0, 0, 1, 0, 1) et (1, 0, 0, 1, 1, 1).

§4. PROGRAMMATION LINÉAIRE PARAMÉTRIQUE À VARIABLES BIVALENTES.

Supposons que le problème qui nous intéresse soit celui de la minimisation de la fonction linéaire à variables bivalentes

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i\lambda)\, x_i \tag{36}$$

avec certaines restrictions linéaires pour les variables ; ici λ est un paramètre pouvant prendre, dans certains problèmes, n'importe quelle valeur réelle, et, dans d'autres problèmes, pouvant varier dans un intervalle $[\lambda', \lambda'']$ fixé d'avance.

Etant donné que le second problème est résolu d'une façon similaire au premier, nous ne nous occuperons donc que du cas où λ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

Pour réduire ces problèmes au cas traité dans le paragraphe précédent il suffit de séparer la discussion par rapport aux signes des coefficients $c_i + \lambda\, d_i$, qui dépendent maitenant de λ. Les points „critiques" sont $\frac{-c_i}{d_i}$ (pour $d_i \neq 0$) et ils déterminent les intervalles sur lesquels on devra étudier le comportement des coefficients.

Exemple 10. Minimiser la fonction

$$25 + (15 + 3\lambda)\, x_1 + (-6 - 2\lambda)\, x_2 + (-4 - 2\lambda)\, x_3 + (4 + 4\lambda)\, x_4 + \\ + 9\lambda x_5 + (8 - 2\lambda)\, x_6 \qquad (37)$$

avec les conditions (34) pour les valeurs réelles du paramètre λ.

Nous pouvons établir le tableau ci-dessous pour les signes des coefficients des variables :

	$15+3\lambda$	$-6-2\lambda$	$-4-2\lambda$	$4+4\lambda$	9λ	$8-2\lambda$
$\lambda < -5$	−	+	+	−	−	+
$\lambda = -5$	0	+	+	−	−	+
$-5 < \lambda < -3$	+	+	+	−	−	+
$\lambda = -3$	+	0	+	−	−	+
$-3 < \lambda < -2$	+	−	+	−	−	+
$\lambda = -2$	+	−	0	−	−	+
$-2 < \lambda < -1$	+	−	−	−	−	+
$\lambda = -1$	+	−	−	0	−	+
$-1 > \lambda < 0$	+	−	−	+	−	+
$\lambda = 0$	+	−	−	+	0	+
$0 < \lambda < 4$	+	−	−	+	+	+
$\lambda = 4$	+	−	−	+	+	0
$\lambda > 4$	+	−	−	+	+	−

Dans chacun des tableaux suivants le minimum est indiqué par l'encadrement de la valeur correspondante.

1) Pour $\lambda < -5$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau :

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	1	0	0	1	1	0	$\boxed{44 + 16\,\lambda}$
2	1	1	1	1	1	0	$34 + 12\,\lambda$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\,\lambda$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\,\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\,\lambda$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\,\lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\,\lambda$

2) Pour $\lambda = -5$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	—	0	0	1	1	0	$29 + 13\lambda = \boxed{-36}$
2	—	1	1	1	1	0	$19 + 9\lambda = -26$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda = 15$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda = -12$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda = 33$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\lambda = -16$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda = 25$

3) Pour $-5 < \lambda < -3$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	0	0	1	1	0	$\boxed{29 + 13\lambda}$
2	0	1	1	1	1	0	$19 + 9\lambda$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda$

4) Pour $\lambda = -3$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	—	0	1	1	0	$29 + 13\lambda = \boxed{-10}$
2	0	1	1	1	1	0	$19 + 9\lambda = -8$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda = 19$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda = 6$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda = 39$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\lambda = 4$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda = 31$

5) Pour $-3 < \lambda < -2$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	1	0	$\underline{\boxed{23 + 11\,\lambda}}$
2	0	1	1	1	1	0	$19 + 9\,\lambda$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\,\lambda$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\,\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\,\lambda$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\,\lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\,\lambda$

6) Pour $\lambda = -2$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	1	0	$\underline{\boxed{1}}$
2	0	1	1	1	1	0	$\underline{\boxed{1}}$
3	0	0	1	1	0	0	21
4	0	0	1	1	1	1	15
5	1	0	1	1	0	1	42
6	1	1	0	0	1	0	14
7	1	0	0	0	0	0	34

7) Pour $-2 < \lambda < -1$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	1	0	$23 + 11\,\lambda$
2	0	1	1	1	1	0	$\underline{\boxed{19 + 9\,\lambda}}$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\,\lambda$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\,\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\,\lambda$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\,\lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\,\lambda$

8) Pour $\lambda = -1$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	1	0	$23 + 11\lambda = 12$
2	0	1	1	1	1	0	$19 + 9\lambda = \boxed{10}$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda = 23$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda = 24$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda = 45$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\lambda = 24$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda = 37$

9) Pour $-1 > \lambda < 0$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	1	0	$23 + 11\lambda$
2	0	1	1	1	1	0	$\boxed{11 + 9\lambda}$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda$
6	1	1	0	0	1	0	$34 + 10\lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda$

10) Pour $\lambda = 0$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	—	0	$23 + 2\lambda = 23$
2	0	1	1	1	—	0	$19 = \boxed{19}$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda = 25$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda = 33$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda = 48$
6	1	1	0	0	—	0	$34 + \lambda = 34$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda = 40$

11) Pour $0 < \lambda < 4$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	0	0	$23 + 2\lambda$
2	0	1	1	1	0	0	$\boxed{19}$
3	0	0	1	1	0	0	$25 + 2\lambda$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda$
6	1	1	0	0	0	0	$34 + \lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda$

12) Pour $\lambda = 4$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	0	—	$23 + 2\lambda = 31$
2	0	1	1	1	0	—	$19 \quad = \boxed{19}$
3	0	0	1	1	0	—	$25 + 2\lambda = 33$
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda = 79$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda = 60$
6	1	1	0	0	0	0	$34 + \lambda = 38$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda = 52$

13) Pour $\lambda > 4$ on doit chercher les solutions optimum dans le tableau

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valeur de (37)
1	0	1	0	1	0	1	31
2	0	1	1	1	0	1	$\boxed{27 - 2\lambda}$
3	0	0	1	1	0	1	33
4	0	0	1	1	1	1	$33 + 9\lambda$
5	1	0	1	1	0	1	$48 + 3\lambda$
6	1	1	0	0	0	0	$34 + \lambda$
7	1	0	0	0	0	0	$40 + 3\lambda$

Les tableaux ci-dessus permettent de voir que les solutions optimum du problème des diverses valeurs des paramètres se trouvent dans le tableau suivant :

No.	Valeurs du paramètre	Solution optimum						Valeur minimum
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	$\lambda < -5$	1	0	0	1	1	0	$44 + 16\lambda$
2	$\lambda = -5$	—	0	0	1	1	0	-36
3	$-5 < \lambda < -3$	0	0	0	1	1	0	$29 + 13\lambda$
4	$\lambda = -3$	0	—	0	1	1	0	-10
5	$-3 < \lambda < -2$	0	1	0	1	1	0	$23 + 11\lambda$
6	$\lambda = -2$	0	1	—	1	1	0	1
7	$-2 < \lambda < -1$	0	1	1	1	1	0	$19 + 9\lambda$
8	$\lambda = -1$	0	1	1	1	1	0	10
9	$-1 < \lambda < 0$	0	1	1	1	1	0	$19 + 9\lambda$
10	$\lambda = 0$	0	1	1	1	—	0	19
11	$0 < \lambda < 4$	0	1	1	1	0	0	19
12	$\lambda = 4$	0	1	1	1	0	—	19
13	$\lambda > 4$	0	1	1	1	0	1	$27 - 2\lambda$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Carvallo: *Principes et applications de l'analyse booléenne*, Gauthier-Villars Paris, 1965.

2. S. Vajda: *Introduction to Mathematical Programming*, Addison-Wesley Publ. Comp London, 1962.

A THEORY OF BINARY DECISIONS THE LINEAR CASE

In many economic problems a choice must be effected : from a certain set of „activities", certain subsets are to be found, which fulfil the conditions of the problem and possibly minimize (or maximize) a function.

The problems of binary decisions can be grouped into two main categories. The problems of the first category lead to a system of bivalent equations and inequalities. The paper pre sents a method allowing to optain all the possible solutions of the problem. The solutions appear grouped into „families of solutions".

The problems of the second category lead to the minimization (or the maximization) of a linear function with bivalent variables, these variables being subject to a system of linear equations and inequalities.

The authors propos the following method of solution:

a) the determination of all the solutions of the restrictive conditions;

b) the choosing of the optimal solution from each family;

c) the finding of the optimal solution of the problem among the solutions found at the point b.

The proposed method has several advantages.

ТЕОРИЯ БИНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНИЙ СЛУЧАЙ

По многочисленным экономическим вопросам ставится задача выбора: из определенной совокупности «видов деятельности» выбираются определенные подсовокупности, удовлетворяюшие условиям задачи и возмохно минимизирующие (максимизирующие) какую-либо функцию.

Задачи линейных бинарных решений можно сгруппировать на две основные категории. Задачи. первой категории требуют решения системы бинарных уравнений и неравенств. В статье излагается метод, позволяющий получать все возможные решения задачи. Решения группируются «по семействам решений».

Задачи второй категории требуют минимизации (максимизации) линейной функции с двухвалентными переменными, которые входят в систему линейных уравнений и неравенств.

Предлагается следующий мегод:

а) определение всех решений ограничительных условий;

б) выбор оптимального решения по каждому семейству;

в) получение оптимального решения задачи из решений, полученных по пункту б.

Предлагаемый метод имеет много преимуществ.