Ж. АУРИАН
К. ЛАЗЭР

Распространение метода критического пути на работы, выполняемые цепным методом

Для практического разрешения на нынешнем этапе вопросов планирования и наблюдения за выполнением цепных работ необходимо применять как принципы метода критического пути, так и принципы теории цепных работ.

Несколько лет тому назад единственным методом планирования в строительном секторе был цепной метод работы. После 1959 г. началсь распространение во многих областях деятельности метода критического пути. Подробный анализ эффективности обоих методов приводит к заключению о том, что оба метода имеют ценные качества, одновременно отмечается необходимость развития способов планирования в целях расширения способности охвата решающих факторов в строительном секторе, которым не уделялось внимания в математических моделях упомянутых методов.

Целью настоящей статьи является представление основ более усовершенствованного метода планирования строительных работ, организованных для выполнения цепным методом, с учетом следующих соображений:

а) процесс строительства имеет комплексный характер и не может быть сведен к упорядоченному множеству самостоятельных видов деятельности; в множестве видов деятельности выделяются подмножества однородных видов деятельности, которым должна быть обеспечена непрерывность; эта черта признается в цепном методе работы и остается без внимания в некоторой степени в методе критического пути;

б) в процессе производства проявляются явления ожидания с большими экономическими последствиями; этому аспекту не уделяется внимания в обоих методах.

Рассматриваемые в настоящей статье методы основываются на некоторых результатах цепного метода работы и метода критического пути. Осуществление более обширной математической модели стало возможным благодаря

более эффективному представлению технологического процесса и применению теории рядов ожидания и вероятностных методов оценки простоев и запозданий, которые неизбежно имеют место в производстве.

1. РЕАЛЬНЫЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ПРОЦЕСС И НЕКОТОРЫЕ ГИПОТЕЗЫ МЕТОДА КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ

Метод критического пути имеет в своей основе достаточно общую математическую модель, позволяющую применять его в большинстве конкретных случаев для планирования комплексных заданий с очень разнообразной структурой.

Однако, как указывается и в специальной литературе (1), «метод не является универсальным и многие вопросы не могут быть разрешены при его помощи; по мере того, как открываются и внедряются новые методы упорядочения и планирования, возникают новые вопросы, требующие различных и более усовершенствованных алгоритмов». В качестве примера программ, которые нельзя решить при помощи метода критического пути в его первоначальной форме, можно указать те, которые содержат «децизионные» события. Эти события характеризуются тем, что от результатов одного вида деятельности зависит дальнейшее развертывание программы.

Большие трудности возникают также при применении метода критического пути для работ, производимых непрерывным потоком, или для серийных работ с повторным характером. Характеристика этих работ заключается в том, что рабочие бригады и производственное оборудование циклично возвращаются к выполнению одинаковых или аналогичных видов деятельности и этот отличительный характер ведет к появлению в системе преобладающего явления — ожидания. Строительные работы требуют в большинстве случаев такого способа организации последовательного выполнения большого числа операций на различных участках объекта или на различных одинаковых или аналогичных объектах.

В целях определения характеристик, которые должны иметь комплексные задания для того, чтобы соответствовать математической модели метода критического пути, необходимо рассмотреть некоторые гипотезы, лежащие в основе этой модели, а именно:

а) ожидания в системе имеют незначительный экономический эффект и поэтому не принимаются в расчет;

б) последовательные виды деятельности не совпадают;

в) технологический процесс строго определен и не существует «децизионных» событий.

Принятие этих гипотез, в особенности, для планирования выполнения строительных работ может создавать трудности с большими экономическими последствиями.

Так, гипотеза (а) предполагает, что использование резервов в некритических видах деятельности может происходить вполне свободно, а запоздания критических видов деятельности ведут лишь к увеличению длительности работ. В действительности, в строительстве ожидание той или иной рабочей бригады, оснащенной рядом средств производства (оборудованием, инструментом и приспособлениями), сопровождается дополнительными расходами и,

таким образом, любое несоблюдение запланированного срока (находится ли оно на критическом пути или нет) имеет экономические последствия.

Гипотеза (б) вытекает из того соображения, что каждый вид деятельности в пределах комплексного действия развертывается последовательно, будучи возможным лишь после того, как были полностью закончены предыдущие виды деятельности. В строительстве последовательность имеет, однако, более комплексный характер. Виды деятельности, считающиеся последовательными в технологическом отношении, могут, в основном, совпадать вследствие их непрерывного характера на одном и том же крупном объекте; сейчас же после начала предыдущего вида деятельности создается задел для последующего вида деятельности.

Гипотеза (в) обусловила общность метода ПЭРТ, обусловливая программы с «децизионными» событиями.

2. ЦЕПНОЙ МЕТОД РАБОТЫ

Цепной метод обеспечивает высокую организованность технологического процесса и имеет особую эффективность в случае непрерывных цепей большой длительности, по которым выполняется большое число одинаковых или аналогичных работ. Например, при строительстве жилых домов в квартале отдельные участки работы представляют собой единицы, которые повторяются, причем каждая из них состоит из определенного числа видов деятельности или рабочих процессов (кладки, штукатурки, настила полов, окраски и т. д.). Если считать, что жилой квартал имеет n повторяющихся единиц и a методов деятельности, для получения наименьшей длительности выполнения наиболее целесообразным путем является планирование выполнения работ по графику в рис. 1.

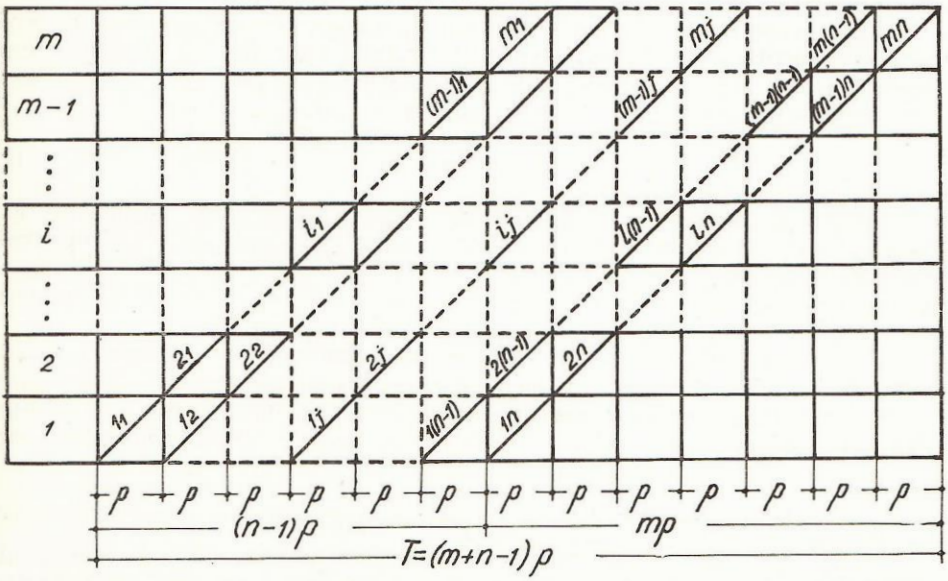

Рис. 1 Циклограмма для повторной работы $L\ (m,n)$ и решение планирования $P\ (m,n,p)$

Сущность организации любого производства цепным методом заключается в том, что производство в течение длительного промежутка времени выполняется ритмично, равномерным потоком, в котором постоянное число рабочих, использующих одни и те же средства производства и систематически выполняющих однородные работы, производит в каждый промежуток времени неизменное количество продукции. В общем случае модель цепного планирования комплекса работ состоит из множества видов деятельности, сгруппированных в элементарные цепи видов деятельности; каждая элементарная цепь представляет собой подмножество однородных в технологическом и организационном отношении видов деятельности (объекты или части объектов), выполняемых последовательно на различных участках работы. Длительность видов деятельности может быть различной, а последовательность может быть непрерывной или с определенными перерывами между отдельными видами деятельности.

Из вышеприведенного описания можно выявить *повторный характер* цепных работ; основным принципом организации работ является то, что важные технологические процессы выполняются последовательно на различных участках одними и теми же специализированными бригадами, оснащенными определенными средствами труда. Повторный характер усиливается в случае работ ритмичными цепями, в которых элементарные цепи имеют модуль цикличности, постоянный или кратный основному модулю. Они могут быть различных видов: ритмичные цепи по участкам, непрерывные линейные цепи или разделенные цепи. Частным случаем работ ритмичной цепью является тот случай, когда все виды деятельности имеют один и тот же модуль цикличности *) (рис. 1). В дальнейшем они будут именоваться строго повторяющимися работами.

Повторяющиеся работы имеют то замечательное свойство, что они могут быть расчленены на m одинаковых участков, которые, в свою очередь, могут быть расчленены на n видов деятельности **).

Классический метод цепной работы основывается на детерминистской модели развертывания работ. Общие характеристики метода планирования [обозначенного $P\ (m, n, p)$], вытекает из циклограммы в рис. 1.

Длительность выполнения всей работы составляет:

$$T = (m + n - 1)\, p \qquad (1)$$

Плановое решение $P(m, n, p)$ может иметь следующие преимущества:

— общая длительность является оптимальной, будучи наиболее короткой при рациональных условиях работы (т. е. в том случае, когда все n аналогичных видов деятельности выполняются одной и той же бригадой и одним и тем же оборудованием);

— ритм производства и расход ресурсов являются неизменными и равномерными, за исключением периодов образования и упразднения общей цепи.

Вышеуказанные преимущества являются исключительными, но эффективность метода снижается из-за жесткости гипотез, которые не подтверж-

---

*) Модулем цикличности называется промежуток времени p. Длительность каждого вида деятельности на каждом участке равна p.

**) В дальнейшем принимается более показательное обозначение, а именно цепные работы обозначаются $L\ (m, n)$, где m обозначает число участков, а n — число видов деятельности. Например, работы с 10 участками и 5 видами деятельности имеют обозначение $L\ (10,5)$.

даются фактическим выполнением работ. Эти гипотезы являются следующими:

— запланированная длительность выполнения каждого вида деятельности (p) осуществляется в точности;

— установление состава бригад и соответствующего оборудования может осуществляться таким образом, чтобы приближенность расчета не отражалась на их производительности;

— число участков (повторяющихся единиц) является большим.

Первая гипотеза, в особенности, является очень строгой и вообще практически неосуществимой. При планировании длительности видов деятельности принимаются в расчет средние величины; на практике величины длительности являются алеаторными переменными. Как статистическая вариация длительности выполнения, для которой была запланирована средняя длительность p, так и многочисленные причины неизбежных запозданий (недостатки снабжения, неблагоприятная погода, неявки на работу, изменения условий работы и т. д.) ведут к большим разрывам между выполнением и планом со следующими последствиями:

а) бригады ожидают освобождения фронта работ и, следовательно, получаются непроизводительные простои;

б) ожидают участки, результатом чего является увеличение длительности выполнения.

Экономический эффект от планового решения $P(m, n, p)$ не является ожидаемым (ожидания обусловливают расходы, а запланированная длительность не осуществляется).

Схематически виды структуры различных комплексных заданий могут быть следующими:

1. Общий вид, при котором множество видов деятельности имеет форму:

$$L_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{2}$$

2. Повторяющиеся цепные работы могут быть следующих видов:

$$\text{а) } L_2 = (a_{ij}) \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{3}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

где подмножество a_{ij} состоит из однородных видов деятельности, в результате чего эти виды деятельности выполняются последовательно одной и той же специализированной бригадой;

$$\text{б) } L_3 = (a_{ij}) \text{ — строго повторяющиеся работы —} \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

где все виды деятельности с тем же подстрочным индексом являются одинаковыми или почти одинаковыми (рис. 2).

Характеристики цепных работ, следовательно, представляются следующими:

а) множество видов деятельности состоит из подмножеств, виды деятельности которых выполняются одними и теми же бригадами, оснащенными соответствующим оборудованием;

б) трудовые ресурсы и оборудование предполагаются израсходованными, независимо от их фактического использования в запланированном промежутке времени;

в) ожидания, вызванные любыми причинами, обусловливают расходы.

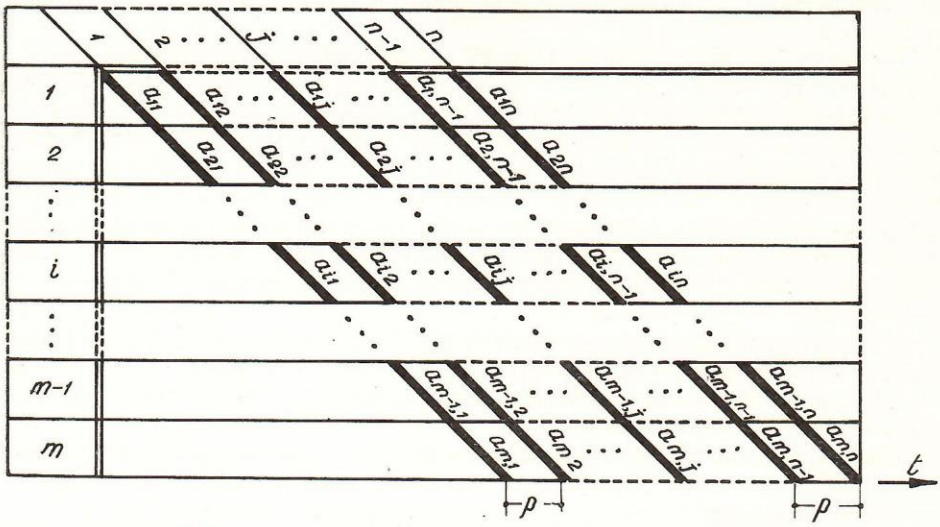

Рис. 2 Циклограмма, применяемая к матричному обозначению P $(m.n.p)$

Вследствие этих характеристик необходимо, чтобы модель планирования содержала ряд ограничений.

Помимо известных общих условий метода критического пути, необходимо изучить и следующее:

— ожидания в системе;

— непрерывность работы бригад;

— оптимизация системы с добавлением, помимо целевой функции длительности работ, и критериев непрерывности и минимизации ожиданий.

С этой целью необходимо построить специальную математическую модель, которая учитывала бы специфическую структуру цепных работ.

3. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЦЕПНЫХ РАБОТ

Динамику процесса выполнения повторяющихся работ, запланированных по цепному методу работы, можно изучать при помощи теории рядов ожидания [4, 11].

Действительно, традиционный метод решения имеет определенные пределы, поскольку, с одной стороны, невозможно добиться полной уравновешенности бригад, а с другой стороны, длительность одинаковых видов деятельности, выполняемых на различных участках, не может иметь неизменную во времени величину. Для определения модуля цикличности необходимо принимать в расчет различные законы вероятности по каждому виду деятельности.

При толковании выполнения повторяющегося строительства сквозь призму теории рядов ожидания среднюю служебную длительность можно считать средней длительностью, необходимой для выполнения определенного вида деятельности на том или ином участке. Длительность выполнения предыдущего вида деятельности на этом участке, обусловливающая ритм, в котором

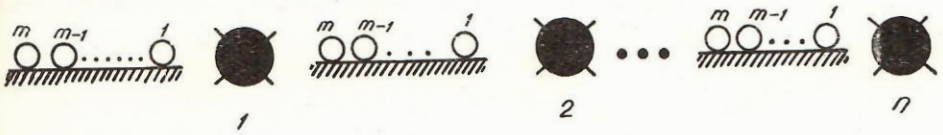

Рис. 3

данный участок поступает в распоряжение рабочей бригады, может быть приравнена к промежутку времени прибытия потребителей. В случае, если имеют место запоздания в выполнении какого-либо вида деятельности на одном из участков, например, в выполнении кладки, последующий участок «ожидает» начала работ по кладке. Смысл понятия «ожидание» заключается в том, что некоторые виды деятельности начинаются с запозданием против сроков, предусмотренных планом. Можно считать, что множество всех участков, на которых выполняется поочередно определенный вид деятельности, образует ряд, причем каждый элемент должен обслуживаться рабочей бригадой.

Ряд всех участков образует, следовательно, ряд ожиданий. Поскольку каждый участок состоит из определенного числа видов деятельности, комплекс работ можно рассматривать как серию рядов ожиданий.

Повторяющиеся работы могут быть приравнены к системам, которые в специальной литературе [7] называются «системами с последовательными станциями» или «каскадными системами». Система ожидания с последовательными станциями состоит из m последовательных подсистем таким образом, что «выход» из одной подсистемы является «входом» в последующую. В случае повторяющихся работ существует n подсистем (которые совпадают с числом элементарных цепей и в каждой из которых служебная станция является единственной, состоящей из специализированной бригады). Потребителями, которых последовательно обслуживают m подсистем, являются участки. В рис. 3 представлена каскадная система ожидания (или система с последовательными станциями).

Служебный фактор, представляющий собой существенный параметр процесса ожидания, является (при планировании по ритмичному цепному методу) равным единице. Как известно, в системе со служебным фактором, равным единице, возникновение чрезмерных ожиданий как потребителей, так и пунктов обслуживания, является неизбежным. Объем ожиданий возрастает при увеличении повторяемости работ. Строительная работа имеет, однако, конечное число участков и в результате этого, хотя тенденция увеличения длительности ожиданий представляет собой естественное явление, они остаются все же ограниченными. С другой стороны, в процессе выполнения возникает противодействие, ограничивающее нарушающие факторы — специфическая реакция систем, в состав которых входят люди. Одновременно особо важную роль играет внешнее регулирование системы путем административно-технического руководства.

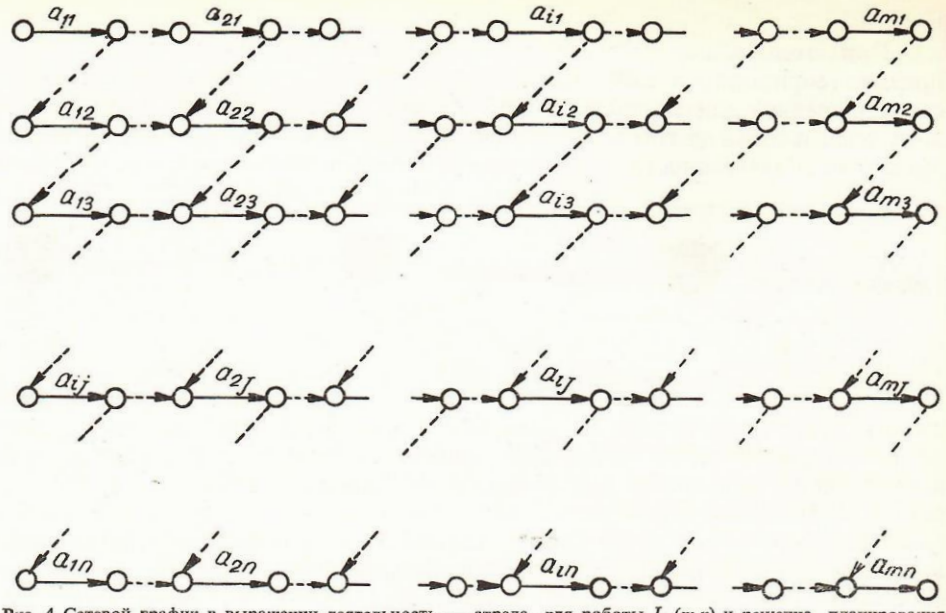

Рис. 4 Сетевой график в выражении деятельность — стрела, для роботы L (m,n) и решение планирования P (m,n,p)

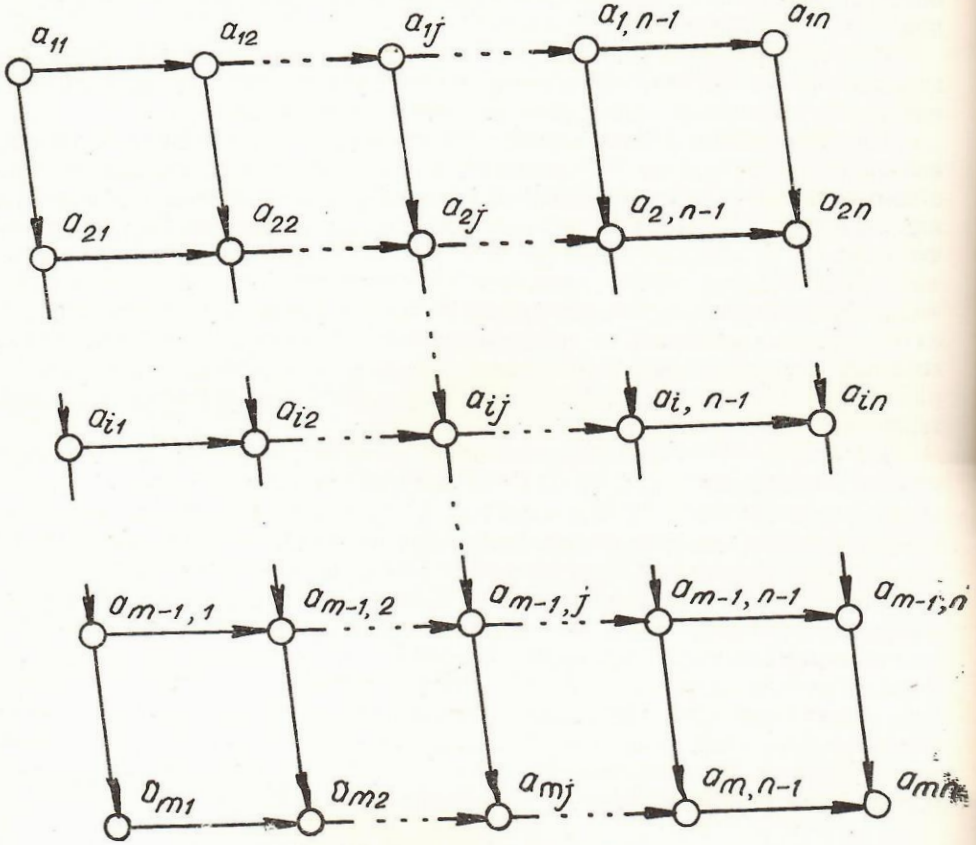

Рис. 5 График повторной работы L (m,n)

Комплексный процесс работ не может быть включен в упрощенные модели систем ожидания, разработанные до сих пор. Теория рядов ожидания позволяет, однако, подвергнуть анализу важнейшие характеристики рабочего процесса в целях получения улучшенных плановых решений.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ И НАБЛЮДЕНИИ ЗА ВЫПОЛНЕНИЕМ ЦЕПНЫХ РАБОТ

Представление последовательности видов деятельности для работ, выполняемых цепным методом, можно осуществить при помощи циклограмм, графиков Гантта или сетевых графиков.

Применение циклограмм имеет преимущество интуитивного представления, но не позволяет отграничить этапы проектирования технологического процесса от расчета сроков и длительности. Актуализация циклограммы является также очень трудной в ходе выполнения работ и пре дполагает повторное проектирование выполнения.

Устранение этих недостатков, возникающих и при применении обычного календарного графика — Гантта — привело к изучению возможностей применения метода критического пути при планировании цепных работ.

Представление при помощи сетевых графиков обусловливает необходимость представления в качестве *особого вида деятельности каждой операции, выполняемой на каждом участке работы, в каждой элементарной цепи.* Рассматривая строго повторяющуюся работу, представленную при помощи циклограммы в рис. 1, сетевой график в представлении деятельность — стрела, приведенный в рис. 4, имеет регулярную форму, соответствующую характеристикам работ. Технологические связи представлены при помощи фиктивных видов деятельности *). Сетевой график в представлении деятельность — вершина приводится в рис. 5. Отмечается, что этот способ представления не требует фиктивных видов деятельности для строго повторяющихся работ.

Однако, эти формы графиков не являются соответствующими для всех работ, выполняемых цепным методом. Так, они не соответствуют потребностям при линейной работе — например, при модернизации части дороги, для которой нет необходимости в разделении на участки, при рабочих процессах, выполняемых цепным методом с неодинаковыми ритмами, при последовательных рабочих процессах, между которыми необходимы определенные минимальные разрывы.

С учетом различных ритмов для обеспечения непрерывности работы бригад минимальные разрывы должны предусматриваться либо по окончании рабочих процессов, либо в начале их. Для того, чтобы представить при помощи сетевых графиков такое положение, необходимо ввести фиктивные виды деятельности с определенной длительностью, как указывается в рис. 6.

Легко отметить, что длительность фиктивных видов деятельности (0—2) и (3—5), обозначенная α_1 и β_2, представляется следующей:

$$d_{02} = \alpha_1 = \gamma_1 + d_1 - d_2$$

$$d_{35} = \beta_2 = \gamma_2 + d_3 - d_2.$$

---

*) Применяется общее обозначение при помощи двух подстрочных индексов, т. е. α_{ij} означает вид деятельности на участке *i*, выполняемый бригадой *ji*.

Общим случаем является цепная организация комплексных работ, состоящих из нескольких объектов, на которых длительность одних и тех же рабочих процессов может быть различной. Одновременно технологические или организационные соображения могут требовать определенных условий, как, например:

а) частичное совмещение на одном и том же участке или на одном и том же объекте двух рабочих процессов, выполняемых последовательно (напри-

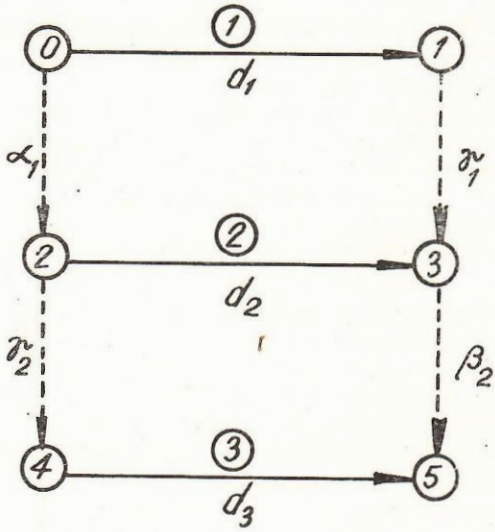

Рис. 6

мер, работы по бетонированию фундамента начинаются до полного окончания земляных работ на всей площади участка или объекта);

б) обеспечение минимальных разрывов между началом или окончанием последовательных видов деятельности на одном и том же участке.

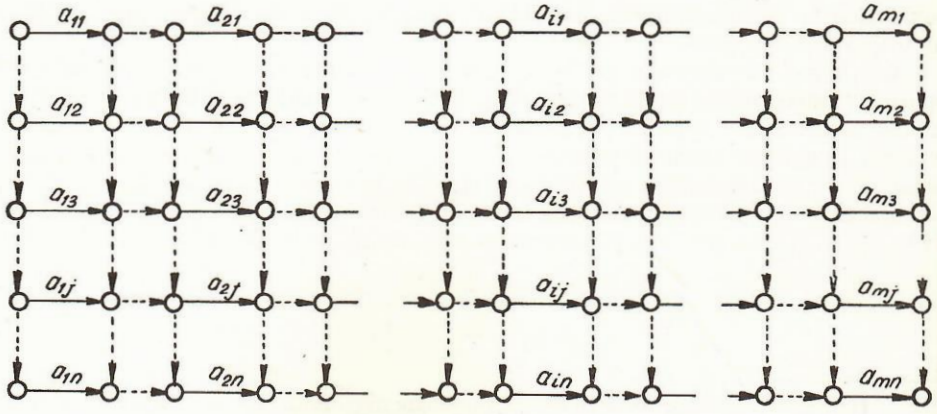

Рис. 7 Сетевой график в выражении деятельность-стрела для работы L (m,n)

Для представления такого положения вводятся следующие обозначения:

α_{ij} — разрыв между началом деятельности α_{ij} и прекращением деятельности $a_{i,j+1}$;

β_{ij} — разрыв между окончанием деятельности a_{ij} и окончанием деятельности $a_{i,j+1}$;

γ_{ij} — минимальный разрыв, который должен быть обеспечен вследствие технологических и организационных условий между видами деятельности a_{ij} и $a_{i,j+1}$;

δ_{ij} — минимальный разрыв, который должен быть обеспечен вследствие технологических и организационных условий между окончанием деятельности a_{ij} и началом деятельности $a_{i,j+1}$.

Разрывы α_{ij} и β_{ij} могут быть определены в зависимости от γ_{ij} и δ_{ij} по различным видам цепных работ.

Представление работы с m участков и n видов деятельности приводится в рис. 7.

5. РАСЧЕТ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПОВТОРЯЮЩЕЙСЯ РАБОТЫ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

В методе критического пути рассматривается детерминистская модель для расчета длительности, т. е. считается возможным определить длительность каждого вида деятельности, а конечный срок и промежуточные сроки вытекают из длины критического пути между начальной и конечной фазами или промежуточными фазами. В модели, применяемой методами класса ПЭРТ, учитывается алеаторный характер длительности только для расчета ее средней величины при гипотезе распределения p. Одновременно определяется и вероятность соблюдения этих сроков. Сроки рассчитываются, однако, также, как и в детерминистской модели, в которой длительность δ_{ij} видов деятельности определяется при помощи средних величин δ_{ij}.

Сроки, получаемые таким образом, всегда являются оптимистическими; можно доказать, что длина критического пути всегда больше, чем получаемая на основе детерминистской модели [1]. Возможные запоздания, происходящие вследствие увеличения длительности отдельных видов деятельности, ведут к увеличению общей длительности, если запоздания имеют место на критическом пути или если они превышают общие резервы некритических видов деятельности.

При цепных работах, в особенности, при строго повторяющихся работах в зависимости от метода определения длительности все виды деятельности являются критическими; любое запоздание ведет к превышению сроков и одновременно к простоям. Поэтому вопрос определения длительности имеет в данном случае особое значение.

Вероятностная модель выполнения работ должна позволять определять распределение величины длительности выполнения таким образом, чтобы можно было рассчитать длительность, соответствующую определенным степеням вероятности. Математический инструмент для решения вероятностной модели уже разработан, но он ведет к очень трудоемким расчетам;

по этой причине была изучена и возможность получения приблизительного решения, требующего более простых расчетов.

В общем случае задача представляется следующим образом:

В детерминистской модели длина критического пути от начала до фазы i получается на основе отношения:

$$t_i = max \times (t_i + \bar{d}\alpha_1, \ t_2 + \bar{d}\alpha_2, \ \dots, \ t_{i-1} + \bar{d}\alpha_m) \qquad (5)$$

где $t_1 = 0$ соответствует начальной фазе и применяются обозначения как в рис. 8.

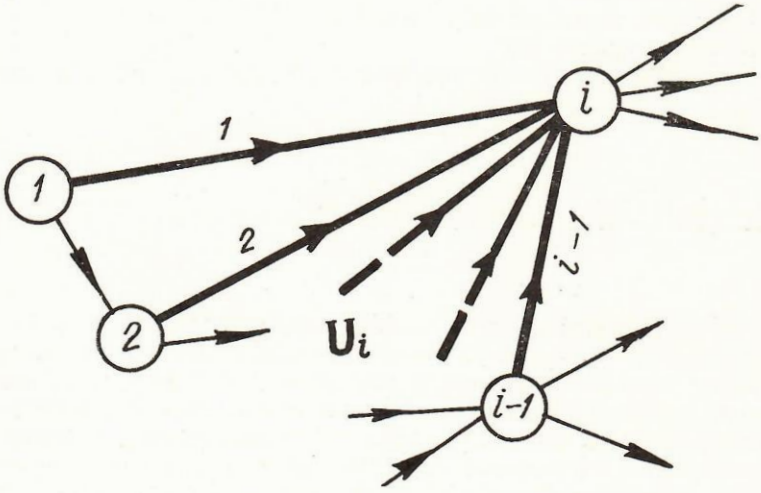

Рис. 8

Для упрощения предполагается, что для вершины i $\bar{d}\alpha_1$, $\bar{d}\alpha_2$, ... соответствуют средней длительности видов деятельности (1, i), (2, i),....

Если один из этих видов деятельности отсутствует, в отношении (5) величина $\bar{d}$ заменяется $-\infty$.

В вероятностной модели считается, что длительности видов деятельности являются алеаторными переменными с известным распределением.

Вообще может быть несколько критических путей между начальной фазой и какой-либо фазой i. Каждый из этих путей, имея длину l_i (θ), состоит из последовательности дуг длительностью $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$. Вероятность такого расположения является произведением вероятностей осуществления длительностей $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

Если ввести обозначения:

$$U_1 = \{\alpha_1, \ \alpha_2, \dots, \ \alpha_m\},$$

где l_i — множество дуг, заходящих в вершину i, и $\theta_{\alpha k}$ — алеаторная величина длительности дуги α_k, можно обозначить $p(\theta)$ распределение вектора времени.

$$\theta_{U_1} = (\theta_{\alpha_1}, \ \theta_{\alpha_2}, \dots, \ \theta_{\alpha_k})$$

В этом случае вероятность расположения соответствующего критическому пути $l_i(\theta)$, является следующей:

$$p(\theta) = p(\theta_{U\bar{1}} \cdot p(\theta_{U\bar{2}}) \ldots p(\theta_{U\bar{m}}),$$

а средняя величина критического пути от начальной фазы до фазы i является следующей:

$$\theta_i = \sum_{\theta} p(\theta)\ l_i\ (\theta) \qquad (6)$$

Можно доказать, что эта величина всегда больше, чем рассчитанная при помощи детерминистской модели.

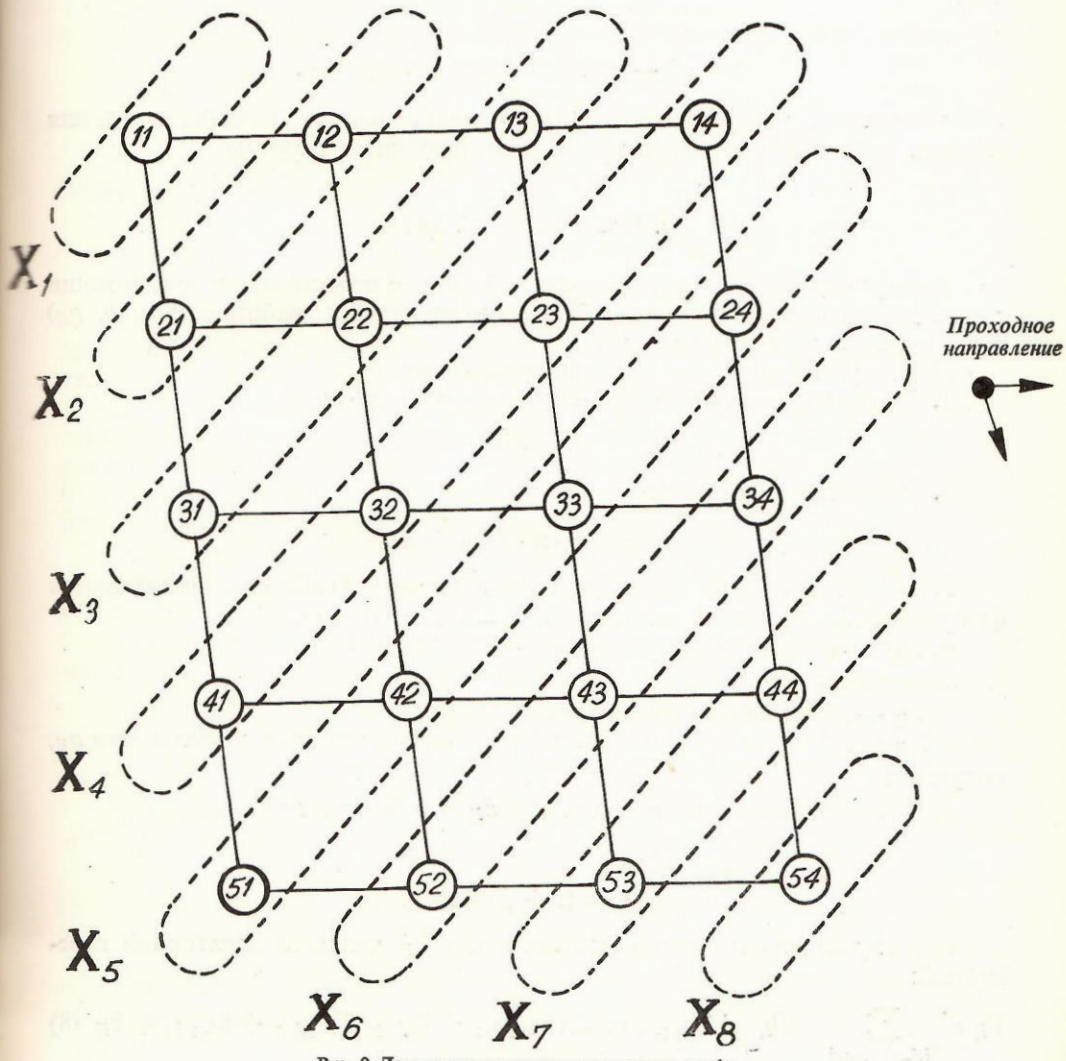

Рис. 9 Подмножества последовательного графа.

В случае, если известно θ_i и распределение его величин, можно определить, следовательно, длительность, соответствующую заданной вероятности, что очень выгодно, в особенности, при повторяющихся работах, но расчеты являются трудоемкими.

Существует возможность рассчитать гораздо более оперативно приблизительную величину T_i, находящуюся между t_i и θ_i, а именно:

$$t_i \leqslant T_i \leqslant \theta_i$$

на основе следующего отношения:

$$T_i = \sum_{\theta_{U\bar{i}}} p(\theta_{U\bar{i}} \max (T_1 + \theta_1,\ T_2 + \theta_2, \ldots, T_{i-1} + \theta_{i-1})) \qquad (7)$$

где:

$$T_1 = 0$$

$p(\theta_{U\bar{i}})$ — распределение вектора $\theta_{U\bar{i}}$.

Формула (7) требует гораздо более простых расчетов, в особенности, для сетевых графиков, соответствующих повторяющимся работам.

6. ПОВТОРНЫЕ ГРАФЫ

Рассматриваются повторяющаяся работа и ее представление при помощи графа деятельность — вершина. Граф повторяющейся работы $P(m, n, p_{ij})$ мы назовем повторным графом.

Повторный граф имеет следующие свойства:

1. Число вершин (видов деятельности) равно $m \cdot n$:

$$q = m \cdot n$$

2. Число дуг составляет:

$$R = 2\, m \cdot n - (m + n).$$

3. Повторный граф является секвенционным графом с ординальной функцией $O(X)$, имеющий величины 1, 2, ... , $(m + n - 1)$.

4. Длительность работ можно выразить просто:

Обозначив:

d_{ij} — длительность деятельности,

T_{ij} — длительность с начала работ до окончания вида деятельности a_{ji},

получаем:

а) в детерминистском случае, когда $d_{ij} = p$ (константа):

$$T_{mn} = (m + n - 1)\ p,$$

$$T_{ij} = (i + j - 1)\ p.$$

б) в случае вероятностной модели, когда θ_{ij} является алеаторной переменной:

$$T_{ij} = \sum_{\theta_{i,j-1} \cup \theta_{i-1,j}} [p(\theta_{i,j-1} \cup \theta_{i-1,j}) \max (T_{i-1,j-1} + \theta_{i,j-1},\ T_{i-1,j-1} + \theta_{i-1,j}] + \theta_{ij} \qquad (8)$$

Формула (8) вытекает из применения отношения (7) к повторным графам в представлении деятельность — вершина.

Для расчета величин T_{ij} применяется следующее свойство секвенционных графов: множество вершин может быть расчленено на N подмножеств $N = m + n - 1$ таким образом, что один элемент подмножества X_{n+1} следует за одним элементом подмножества X_n (см. рис. 9).

Расчет длительности производится в указанном этим расчленением порядке, причем поочередно рассматриваются подмножества, выявленные ординальной функцией.

Например, в графе в рис. 9 предположим, что длительность видов деятельности является алеаторной переменной θ. Очевидно, что θ является распределением; можно допустить, что распределения видов деятельности являются независимыми и тождественными.

Расчет производится следующими этапами:

Длительность первого вида деятельности согласно соотношению (8):

$$T_{11} = \sum_{\theta} p(\theta) \cdot \theta = \theta.$$

На следующем этапе рассматриваются виды деятельности, входящие в подмножество X_2, т. е.:

$$T_{21} = T_{12} = \sum_{\theta} p(\theta) \cdot \; + \bar{\theta} = 2\,\bar{\theta} \quad \text{и т. д.}$$

Зная распределение видов деятельности, можно было бы определить таким путем рост ожидаемой длительности выполнения по сравнению с длительностью, рассчитанной при детерминистской гипотезе.

Для определения порядка величины роста длительности и для сравнения этих ростов с получаемыми при помощи метода симулирования приводятся расчеты, произведенные на основе текущего примера — работы типа $P(m, n, \theta)$, с использованием свойств повторных графов. Для упрощения были приняты дискретные и тождественные для всех видов деятельности распределения.

Для выявления значения распределения алеаторной переменной были произведены расчеты для двух типов распределений с различным рассеиванием, а именно:

1. Какое-либо распределение со средней величиной $\bar{\theta}' = 1{,}04$, рассеиванием $\sigma' = 0{,}111$ и коэффициентом вариации $= 11\%$:

$$\theta' = \begin{pmatrix} d & 0{,}9 & 1 & 1{,}2 \\ p & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

2. Распределение с той же средней величиной $\bar{\theta}'' = 1{,}04$, рассеиванием $\sigma'' = 0{,}249$ и коэффициентом вариации $= 24\%$:

$$\theta'' = \begin{pmatrix} d & 0{,}7 & 1 & 1{,}54 \\ p & 1/4 & 4/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Считается, что распределение имеет положительную асимметрию, т. е. существует тенденция к превышению вследствие имеющихся на стройке условий.

Полученные результаты являются следующими:

Таблица № 1

Уровень Деятельность	a_{11}^{1}	a_{22}^{3}	a_{33}^{5}	a_{44}^{7}	a_{55}^{9}
		А. *Распределение* Θ''			
t_{ij}	1,04	3,12	5,20	7,28	0,36
T_{ij}	1,04000	3,17800	5,35602	7,54260	9,73309
$\frac{T_{ij} - t_{ij}}{t_{ij}}$	0%	1,859%	3,00%	3,60%	3,986%
		Б. *Распределение* Θ''			
t_{ij}	1,04	3,12	5,20	7,28	9,36
T_{ij}	1,04	3,23	5,5208	7,8214	10,128
$\frac{T_{ij} - t_{ij}}{t_{ij}}$	0%	3,74%	6,17%	7,437%	8,207%

Предшествующие расчеты привели к заключению, что длительность повторяющихся работ типа L (5, 5) в вероятностной модели в среднем на 4—8% больше, чем длительность, расчитанная при детерминистской гипотезе, если принятые распределения соответствуют действительности на стройках. Вероятность выполнения этих длительностей составляет не более 50% (на основе отношения $T_{ij} \leqslant \theta_{ij}$).

Для сетевых графиков больших размеров, т. е. имеющих более 5 участков и 5 элементарных цепей, отмечается тенденция увеличения приростов.

Вытекает, что указанными способами можно выявить увеличение общей и частичной длительности повторяющихся работ в результате эффекта вариации длительности видов деятельности.

Увеличение сроков является функцией комплексности сетевых графиков и распределения алеаторных переменных, представляющих собой длительность видов деятельности; поэтому полученные выше результаты следует рассматривать как указания о порядке величин.

Точные расчеты предполагают знание фактических распределений и использование электронных калькуляторов.

На нынешнем этапе все же возможно получать улучшенные плановые решения по сравнению с вытекающими из детерминистской модели, с учетом вышеприведенных результатов и статистических данных о фактической длительности выполнения работ, аналогичных изучаемым.

7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦЕПНЫХ РАБОТ

На основе приведенного анализа можно разработать математическую модель цепных работ и сформулировать принципы улучшения плановых решений. Изучение этой модели позволит в дальнейшем разработать алгоритм для оптимизации планирования цепных работ.

Рассматривая работу типа $L(m, n)$ и обозначив a_{ij} деятельность j на участке i, мы можем выразить множество видов деятельности при помощи матрицы:

$$a_{ij} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{Vmatrix}$$

К работе типа $L(m, n)$ можно применять различные математические модели планирования (или плановые решения), которые мы перечисляем ниже.

I. *Детерминистские модели.* Длительность по видам деятельности представляет собой детерминистские числа. Эти модели могут быть следующими:

1. Общего типа цепных работ. Виды деятельности имеют различную длительность, что можно выразить обозначением $P(m, n, p_{ij})$.

2. Работы с ритмичными цепями. Виды деятельности одной и той же элементарной цепи имеют одинаковую длительность $P(m, n, p_j)$.

3. Строго повторяющиеся работы. Все виды деятельности имеют одинаковую длительность $P(m, n, p)$.

II. *Вероятностные модели.* Длительность видов деятельности представляет собой алеаторные переменные:

1. Общий тип $P(m, n, \theta_{ij})$.

2. Работы с ритмичными цепями $P(m, n, \theta_j)$.

3. Строго повторяющиеся работы $P(m, n, \theta)$.

Существенные свойства последовательности и длительности цепных работ могут быть выражены математическими отношениями, с применением обозначений предыдущего параграфа и некоторых обозначений, аналогичных применяемым в расчете длительности методом критического пути:

t_{ij}^{mt} и t_{ij}^{Mt} — наименьшие и наибольшие сроки начала вида деятельности j на участке i;

t_{ij}^{mt} и t_{ij}^{Mt} — наименьшие и наибольшие сроки окончания вида деятельности j на участке i;

$i = 1, 2, \dots, m$ — участки работ;

$j = 1, 2, \dots n$ — виды деятельности элементарной цепи j.

Ограничительные условия для общего типа цепных работ выражаются системой отношений:

$$\varepsilon_{ij} = t_{i+1,j}^{mt} - t_{ij}^{mt} \geqslant 0 \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m-1 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \tag{9}$$

$$\partial_{ij} = t_{i,j+1}^{mt} - t_{ij}^{mt} \geqslant \delta_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n-1 \end{matrix} \tag{10}$$

Отношения (9) выражают условие последовательного выполнения видов деятельности одной и той же элементарной цепи.

Отношения (10) обеспечивают осуществление разрывов между видами деятельности, необходимых по технологическим или организационным соображениям.

Длительность δ_{ij} представляет собой запланированные разрывы между окончанием вида деятельности j и началом вида деятельности $j+1$ на участке i. Эти разрывы должны иметь наименьшую величину δ_{ij}, которая определяется технологическими или организационными соображениями только в связи с последовательностью обоих видов деятельности a_{ij} и $a_{i,j+1}$. Путем упорядочения всех видов деятельности в их технологической последовательности в элементарных цепях не всегда, однако, представляется возможным соблюдение минимального разрыва δ_{ij}. Разницы, обозначенные ε_{ij}, представляют собой непроизводительное время, т. е. время ожидания бригад, а разницы $\partial_{ij} - \delta_{ij}$ представляют собой время ожидания участков, т. е. увеличения длительности выполнения.

Ограничительные условия (9) и (10) можно представить графически либо при помощи циклограммы, либо при помощи сетевого графика. С этой целью необходимо и достаточно знать матрицы $\| d_{ij} \|$ и $\| \delta_{ij} \|$.

Сетевой график легче составить. Он представляет собой типовую технологическую схему, сохраняющую свои действительности даже при изменении величин γ_{ij} и δ_{ij}.

При строго повторяющихся работах в детерминистской модели отношения (9) и (10) становятся следующими:

$$\varepsilon_{ij} = t^{mt}_{i+1,j} - t^{mt}_{ij} = 0 \tag{11}$$

$$\partial_{ij} = t^{mt}_{i+1,j} - t^{mt}_{ij} = 0 \tag{12}$$

Для оптимизации планового решения критерии оптимизации могут быть следующими:

— Сокращение длительности выполнения

$$\sum_i \sum_j (\partial_{ij} - \delta_{ij}) = \min. \tag{13}$$

— Обеспечение непрерывности работы бригад

$$\sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} = \min. \tag{14}$$

— Промежуточное экономически выгодное решение.

Улучшение плановых решений для общего типа цепных работ можно получить в результате попыток, изменяя определенные промежутки времени δ_{ij} и некоторые величины длительности d_{ij}.

Расчеты по улучшению в нескольких вариантах облегчаются путем применения сетевого графика и электронных калькуляторов.

8. ПЛАНИРОВАНИЕ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ РАБОТ

Заключение качественного порядка, вытекающее из анализа цепных процессов выполнения, толкуемое в свете теории рядов ожидания, состоит в том, что в случае применения детерминистской модели отмечается тенденция роста как длительности выполнения, так и непроизводительного времени бригад. Оба результата ведут к росту себестоимости. Во избежание чрезмерного ожидания целесообразно изменить величину служебного фактора. Это может быть достигнуто двумя способами:

а) предусмотреть резервные разрывы (резервы времени или резервные заделы) между началом определенных циклов рабочих процессов, что означает снижение ритма прибытия потребителей (участков работ);

б) ускорить ритм обслуживания, т. е. сократить длительность выполнения определенных циклов рабочих процессов (сокращение модуля цикличности p_j для определенных величин j).

Оба способа ведут, в конечном счете, к созданию запланированных промежутков времени ожидания; второй способ ведет, однако, и к непроизводительному времени бригад; поэтому его применение целесообразно лишь в случае бригад с низкими расходами.

Анализ эффективности обоих вышеуказанных решений приводит к следующим выводам. Решение (а) требует увеличения длительности выполнения, но взамен достигается сокращение непроизводительного времени бригад. Преимущества решения заключаются в более правильном планировании выполнения работ в результате принятия в расчет неизбежной вариации длительности. Решение (б) ведет, в основном, к сокращению длительности выполнения, но требует увеличения численности отдельных бригад; решение имеет экономические преимущества, но его применение ограничено в отдельных случаях величиной задела, который иногда не позволяет дополнительных сосредоточений рабочей силы.

Конкретный выбор размеров резервных разрывов должен учитывать законы вероятности распределения длительности и экономический эффект увеличения длительности выполнения.

Общая формулировка оптимизации работ представляется следующей: известны n законов вероятности длительности видов деятельности, величины стоимости c_i и c_j ожиданий в единицу времени для бригад и участков и необходимо определить резервы таким образом, чтобы общая стоимость была минимальной.

Поскольку такой метод не разработан, приближенные способы планирования должны учитывать общие принципы эффективности, а именно:

Расчет и распределение запланированных промежутков времени ожидания необходимо производить с учетом единичных расходов отдельных бригад. Оптимальное решение должно соответствовать наименьшим ожиданиям бригад с наибольшими расходами.

Улучшенное (но не оптимальное) решение для планирования повторяющихся работ можно получить методом резервных разрывов, пропорциональных часовой стоимости видов деятельности. С этой целью поступают следующим образом:

Наименьшая длительность строго повторяющейся работы составляет:

$$T_{\min} = (m + n - 1)\ p,$$

но при фактическом выполнении работ этот минимум не может быть достигнут из-за неизбежных ожиданий. Фактическая длительность (T_r) превышает наименьшую длительность ($T_{\min}$), что можно предвидеть путем анализа процессов как системы ожидания, подтвержденной конкретным опытом.

Отношение $T_r/T_{\min}$ можно оценить, как указано в разделе 5 или же по конкретным работам — путем сопоставления длительности работ, выполненных раньше (в предыдущие годы), с длительностью, вытекающей из детерминистской плановой модели.

Обозначив T_s разницу между средней и наименьшей длительностью, получаем:

$$T_s = T_r - T_{\min} \tag{15}$$

Рациональное планирование величины T_s представляет собой важный источник сокращения непроизводительных расходов. При выполнении запланированных работ по классическому цепному методу T_s является суммой ожиданий, возникающих случайно и не подлежащих контролю.

Общая длительность T_s, полученная из отношения (15), эшелонируется таким образом, чтобы создать запланированные резервные разрывы, а именно так, чтобы бригады с бóльшими часовыми расходами (на труд и оборудование) имели меньше ожиданий.

Если обозначить c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удельные расходы вида деятельности i и распределить длительность T_s пропорционально этим расходам, тогда:

$$\frac{x_2}{c_2} = \frac{x_3}{c_3} = \ldots = \frac{x_n}{c_s} = \frac{T_s}{c_i} \tag{16}$$

где x_i представляет собой резервный разрыв, планируемый по виду деятельности i таким образом, чтобы:

$$\sum_{i=2}^{m} x_i = T_s \tag{17}$$

Вышеизложенный способ планирования будет иллюстрирован примером.

Рассматривается комплекс, состоящий из 4 аналогичных объектов, по которым планируется выполнение рабочих процессов циклами, образующими 5 элементарных цепей; они могут быть выполнены различными специализированными строительными организациями, например: работы до нулевой отметки, выполнение опорной структуры, технологический монтаж, установки, отделка. Предполагается возможность синхронизации цепей с получением единого модуля цикличности в 52 дня. Детерминистская модель планирования представлена в циклограмме в рис. 10.

Запланированная длительность выполнения составляет:

$$T = (m + n - 1)\, p = (4 + 5 - 1)\, 52 = 416 \text{ дней.}$$

Специализированные бригады должны приступить к работе в сроки 0, 52, 104, 156 и 208 дней.

Для улучшения планового решения предполагается, что запланированная общая длительность возрастает на 5%, т. е. на 20 дней. Распределение этого промежутка времени производится пропорционально удельным расходам специализированных бригад.

Предполагается, что индексы расходов являются следующими:

Элементарная цепь	1	2	3	4	5
Индекс расходов	1	1	4	1	4

Согласно отношению (16) получаются следующие резервные разрывы:

$$x_2 = x_4 = 2 \text{ дня}$$

$$x_2 = x_5 = 8 \text{ дней}$$

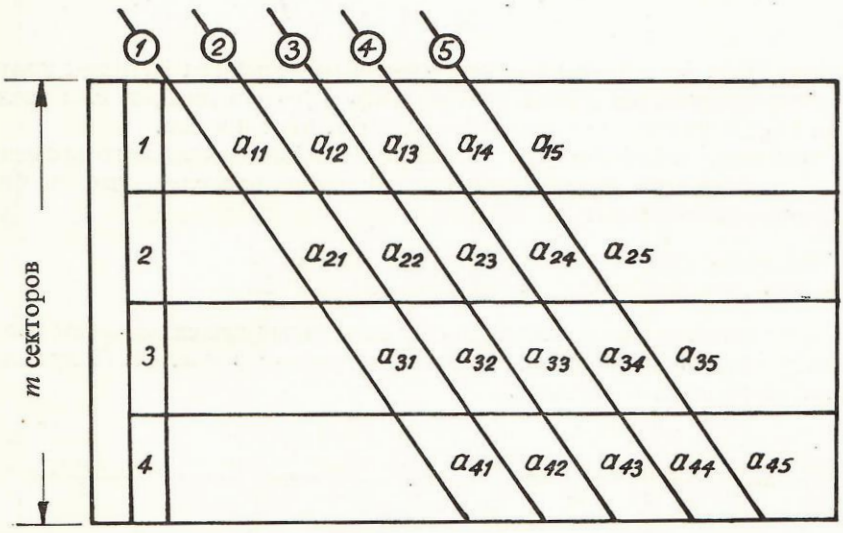

Рис. 10

При этой гипотезе общая длительность составляет:

$$T_2 = 416 + 20 = 436 \text{ дней.}$$

Специализированные бригады приступят к работе в сроки:

0, 54, 114, 168 и 228 дней.

Плановое решение может быть улучшено в дальнейшем, если представляется возможным повысить ритм элементарных цепей с наименьшими расходами. Предполагается снижение модуля цепей 1, 2 и 5 на 10%.

Расчет сроков целесообразно производить методами критического пути.

Отмечается, что запланированная общая длительность остается такой же, как и в предыдущем варианте $T_2 = 436$ дней. Разница заключается в том, что большинство видов деятельности больше не является критическими. Были созданы значительные резервы времени, например, вид деятельности (0—1) с общим резервом в 35 дней, вид деятельность (1—2) = 28 дней. Такие резервы

времени обеспечивают непрерывное выполнение работ даже, если вследствие условий работы на стройке будут иметь место отклонения от запланированной средней длительности видов деятельности.

Для оценки эффективности улучшенных плановых решений было рассчитано одно из возможных выполнений при гипотезе, что величины длительности видов деятельности являются алеаторными переменными.

По всем видам деятельности предусмотрено дискретное распределение (8); выполнение представляется в матричной форме:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 60 & 50 & 45 \\ 60 & 60 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 60 & 45 & 60 & 50 \\ 50 & 60 & 50 & 45 & 50 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Расчеты были выполнены по трем плановым решениям методом критического пути. Получается общая длительность $T_3 = 435$ дней, т. е. с увеличением на 5% по сравнению с запланированной длительностью.

Одновременно возникает ряд ожиданий (непроизводительного времени) бригад, составляющих в общей сложности 103 дня, распределяющихся по бригадам следующим образом:

Элементарная цепь	2	3	4	5
Непроизводительное время (в днях)	13	31	24	32

Такое же выполнение по улучшенному плановому решению путем ввода резервных разрывов представлено в сетевом графике в рис. 11. Получается общая длительность $T = 435$ дней.

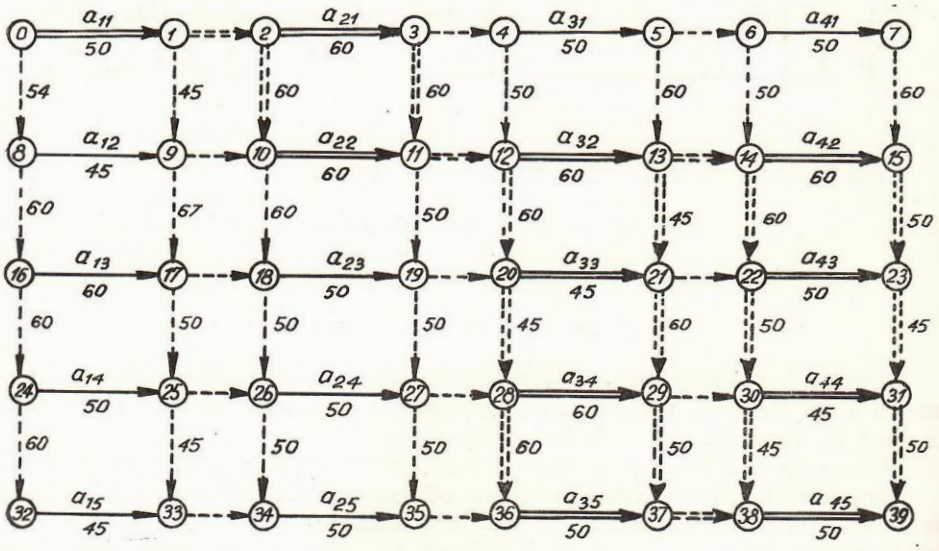

Рис. 11

T = 435 дней

Общее непроизводительное время сокращается до 56 дней со следующим распределением:

Элементарная цепь	2	3	4	5
Непроизводительное время (в днях)	11	21	12	12

Вытекают, следовательно, значительные сокращения длительности ожиданий бригад 3 и 5 с высокими удельными расходами.

Осуществление этого планового решения представлено в сетевом графике в рис. 12.

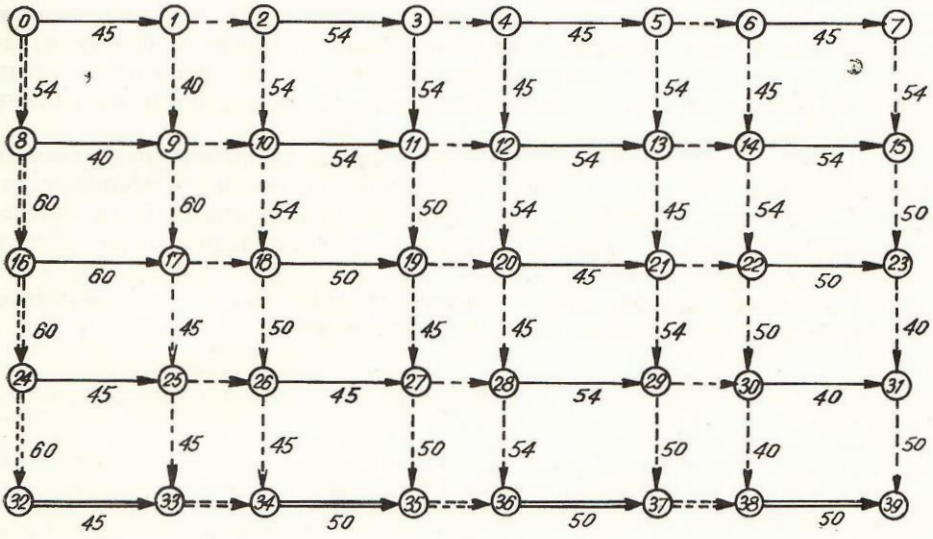

Рис. 12 T = 436 дней

Число критических видов деятельности сократилось, а резервы некритических видов деятельности возросли в значительной мере.

Конечно, это является одним из возможных выполнений; могут появиться и другие выполнения с менее благоприятными эффектами.

Из приведенного опытного применения вытекает, что представление выполнения работ при помощи «технологической шкалы» имеет то преимущество, что позволяет конкретно представить последовательность видов деятельности и частичное совпадение некоторых из них без необходимости разделения объектов на большое число участков.

* * *

Из вышеизложенного вытекает, что при планировании строительных работ, подлежащих выполнению цепным методом, целесообразно учитывать некоторые аспекты, которые остаются без внимания как в методе планиро-

вания цепных работ, так и в методе критического пути, причем эти аспекты связаны:

— с явлениями ожидания в производственном процессе;

— с алеаторным характером длительности видов деятельности.

Приведенный анализ выявил эффект этих аспектов и на основе проведенных расчетов статистико-математическими методами позволил определить порядок величин происходящих в системе запозданий.

Их точный расчет предполагает тщательное статистическое наблюдение на стройках и применение электронных калькуляторов.

Для практического разрешения на нынешнем этапе вопросов в связи с планированием и наблюдением за выполнением цепных работ целесообразно применять как принципы метода критического пути, так и принципы теории цепных работ. Сетевые графики этих работ имеют регулярную форму, отражающую организацию выполнения одними и теми же специализированными бригадами однородных в технологическом и организационном отношении рабочих процессов.

Таким образом, можно планировать все варианты работ, выполняемых цепным методом, с учетом и условий последовательности видов деятельности, представляемых необходимыми разрывами, которые должны быть обеспечены между окончанием одного вида деятельности и началом последующего на одном и том же участке работы.

Для ритмичных цепных работ с единым модулем цикличности — строго повторяющихся работ модель значительно упрощена.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Кауфман А., Дебазей: *Метод критического пути.* Изд. Дюно, Париж, 1961
2. Реннер А.: *Метод критического пути.* Государственное строительное издательство Берлин, 1963.
3. Вареник Е., Канторер С. Е.: *Организация и планирование производства в строительстве* (перевод с русского языка), Институт технической документации, 1963.
4. Нуттал И. Ф.: *Планирование повторяющегося строительства,* Билдинг Рисёрч Стэйшн, Карстон, 1965.
5. Покрас Л. и др.: *Применение метода критического пути при организации цепного* выполнения *строительства.* Журнал «Промышленное строительство и инженерные сооружения» № 6, 1964.
6. Кауфман А., Крюон А.: *Явления ожидания.* Изд. Дюно, Париж, 1961.
7. Кауфман А.: *Динамическое программирование,* Изд. Дюно, Париж, 1964.
8. Фулкерсон Д. Р.: *Оценка ожидаемой длины критического пути в сетях ПЭРТ.*
9. Вареник Е. *Поточная организация строительства при сетевом планировании.* Журнал «Экономика строительства» № 1, 1966.
10. Ауриан Ж., Лазэр С. *Изучение возможностей применения теории рядов ожидания в строительстве.* 1965.
11. Ауриан Ж., Лазэр С.: *Применение рядов ожидания при планировании повторяющихся работ.* Сообщение на сессии ЦСУ, 1965.
12. Лазэр С.: *О планировании строительных работ цепным методом.* Журнал «Строительство» № 10, 1965.
13. Лазэр С.: *О статистическом распределении длительности видов деятельности в строительств.* Сообщение на сессии ЦСУ, 1965.

EXTENSION OF THE CRITICAL PATH METHOD TO CHAIN METHOD WORKS

The authors present the basis of an improved method for planning construction work organized for the chain method, taking into account the fact that the process of construction is of a complex character and cannot be reduced to an ordinate set of independent activities, that in the set of activities one distinguishes sub-sets of activities of the same nature whose continuity must be assured, as well as phenomena of delay which have shown up in the process of production and having important economic implications. The procedures recommended by the author are based on some results of the chain method and of the critical path method. It has been possible to obtain a mathematical model consequently to a more accurate representation of the technological process and by using the theory of the expectance series and of the probability methods for the evaluation of dead time and of delays which inherently occur in production.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LA VOIE CRITIQUE AUX TRAVAUX EXÉCUTÉS SELON LA MÉTHODE "A LA CHAÎNE"

Etant donné que le processus de construction possède un caractère complexe et qu'il ne peut être réduit à une multitude ordonnée d'activités indépendantes et que, d'autre part, dans la multitude des activités on peut distinguer des sous-multitudes d'activités ayant une même nature et dont il faut assurer la continuité et, enfin, que dans le processus de production on rencontre des phénomènes d'attente présentant des implications économiques importantes, les auteurs présentent les bases d'une méthode de planification perfectionnée pour les travaux de construction executés à la chaîne. Les procédés préconisés par les auteurs sont fondés sur certains résultats obtenus par la méthode du travail à la chaîne et par la méthode de la voie critique. Le modèle mathématique a pu être obtenu grâce à une représentation plus rationnelle du processus technique et à l'utilisation de la théorie des suites d'attente et des méthodes fondées sur la probabilité pour l'évaluation des temps morts et des retards qui interviennent nécessairement dans la production.