V. DUMITRU
V. IONESCU

Notes sur la paramétrisation générale

Certains problèmes de mélange optimum de produits pétroliers requièrent la solution de situations fréquentes concernant le remplacement d'un composant du mélange par un autre.

Soit le problème de programmation linéaire

$$\max X_0 = fx \tag{1}$$

soumis aux restrictions

$$A_x = a,\ x \geqq 0 \tag{2}$$

où x est un vecteur colonne à n composants, f un vecteur ligne à n composants, $X_0 = fx$ la fonction à optimiser, A la matrice des réceptions où l'un des vecteurs colonne A^k est de la forme

$$A^k = \bar{A}^k + D^k \tag{3}$$

$D'^k = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)]$ étant le vecteur paramètre.

Dans (*1*) H. Maurin traite le problème dans le cas $A^k = \bar{A}^k + pD^k$, où, D^k est un vecteur constant. Nous montrerons que les formules de H. Maurin, données dans (1) peuvent être utilisées pour résoudre le problème même dans le cas où D^k est un vecteur variable — un paramètre — et nous donnons un exemple numérique. Le problème sous cette forme nous a été suggéré par la nécessité de résoudre certains problèmes de mélange optimum de produits pétroliers (*2*), où surviennent fréquemment des situations concernant la nécessité de remplacer un composant par un autre composant de mélange, ainsi que par l'idée de la généralisation de la méthode paramétrique pour résoudre des problèmes nonlinéaires (*3*.)

Nous supposerons qu'une solution optimum du problème est connue pour $D'^k = 0$. Pour résoudre le problème on considère deux cas :

I. $\bar{A}^k$ n'est pas un vecteur de la base optimum A^{I_0} pour $D'^k = 0$. Alors le vecteur transformé de A^k par $[A^{I_0}]^{-1}$ sera :

$$T_0^k = [A^{I_0}]^{-1} (\bar{A}^k + D^k) = \bar{T}_0^k + [A^{I_0}]^{-1} D^k$$

ou bien, posant

$$\begin{aligned} [A^{I_0}]^{-1} D^k &= W_0^k \\ T_0^k &= \bar{T}_0^k + W_0^k \end{aligned} \tag{4}$$

L'indicateur de l'optimum est donné par la relation

$$\delta^k = \delta_0^k - f^{I_0} W_0^k \tag{5}$$

où $\delta_0^k \leqslant 0$ étant donné que pour $\lambda_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nous avons un optimum.

La solution déterminée pour $D'^k = 0$ demeure optimum et invariable pour les valeurs λ_i pour lesquelles

$$\delta_0^k - f^{I_0} W_0^k \leqslant 0 \tag{6}$$

et cessent d'être optimum pour les valeurs λ_i qui vérifient la relation

$$\delta_0^k - f^{I_0} W_0^k > 0 \tag{7}$$

Les relations (*6*) et (*7*) sont des inéquations linéaires dans les paramètres λ_i qui déterminent deux domaines séparés par l'hyperplan

$$\delta_0^k - f^{I_0} W_0^k = 0$$

Nous noterons par Dopt le domaine déterminé par (*6*) dans lequel la solution demeure optimum.

Dans *C Dopt*, la solution cessant d'être optimum, est réoptimisée par l'introduction du vecteur A^k dans la base d'après l'algorithme simplex.

II. $\bar{A}^k$ est le vecteur q de la base optimum A^{I_0} pour $D'^k = 0$.

Dans ce cas la matrice inverse de la base se transformera d'après la relation :

$$[A^I]^{-1} = E^{(q)} \; [A^{I_0}]^{-1} \tag{8}$$

où $E^{(q)}$ este la matrice unité où le vecteur unitaire q est remplacé par le vecteur $V^{(q)}$ de composants

$$V_q^q = \frac{1}{1 + w_{0q}^k} \tag{9}$$

$$V_i^q = \frac{w_{0i}^k}{1 + w_{0\,q}^k}, \; i \neq q \tag{9'}$$

Il y a trois cas :

a) A^I devient singulière pour

$$1 + W^k_{0\,q} = 0 \tag{10}$$

b) Etant donné que

$$X_{I_0} = E^{(q)}\bar{x}_{I_0}, \tag{11}$$

la solution cesse d'être réalisable pour les composants de X pour lesquels nous avons

$$E^{(q)}\bar{x}_{I_0} < 0 \tag{11'}$$

c) Etant donné que

$$\delta^i = - f^{I_0} E^{(q)} T^i_0 + f^i, \tag{12}$$

la solution cesse d'être optimum s'il existe au moins un i pour lequel

$$- f^{I_0} E^{(q)} T^i_0 + f^i > 0 \tag{12'}$$

On établit de cette manière les domaines pour lesquels le problème de programmation linéaire paramétrique a des solutions réalisables optimum, ainsi que les domaines où le problème n'a pas de solution.

La relation (*10*) représente une équation linéaire des paramètres.

La relation (*11'*) représente m inéquations linéaires des paramètres qui déterminent le domaine pour lequel la solution n'est pas réalisable. Afin d'obtenir une solution réalisable dans le domaine défini par (*11'*) on applique la méthode simplex-duale afin d'éliminer les vecteurs négatifs de la base.

Les relations (*12'*) représentent n-m inéquations linéaires des paramètres qui nous donnent le domaine dans lequel la solution cesse d'être optima. Afin de la réoptimiser on applique l'algorithme simplex.

Exemple numérique. Déterminez le maximum de la fonction

$$x_0 = - 3\,x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3, \text{ pour les conditions :}$$

$$x_1 + 3x_2 + (2 + \lambda_1)\,x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + (1 + \lambda_2)\,x_3 = 4$$

Pour $\lambda_i = 0$, on obtient, en appliquant l'algorithme simplex, la solution :

$$\bar{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

avec :

$$[A^{I_0}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & - 1/6 \\ - 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nous nous trouvons dans le cas où $A^k = A^3$ n'est pas un vecteur de la base optimum pour $\lambda_i = 0$.

Nous avons :

$$\bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$f^{I_0} = (4, -3), \; \delta_0^3 = -\frac{41}{6}$$

$$W_0^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3\lambda_1 - \lambda_2}{6} \\ \dfrac{-\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{pmatrix}$$

Il en résulte :

$$\delta^3 = -\frac{41}{6} - (4, \; -3) \begin{pmatrix} \dfrac{3\lambda_1 - \lambda_2}{6} \\ \dfrac{-\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{pmatrix} = -\frac{41}{6} - \frac{21\lambda_1 - 13\lambda_2}{6}$$

La solution $\bar{x}_I{}^0$ demeure optimum pour les valeurs λ_1, λ_2 pour lesquelles

$$-21\,\lambda_1 + 13\,\lambda_2 - 41 \leqslant 0 \qquad (13)$$

et cesse d'être optimum pour les valeurs λ_1, λ_2 pour lesquelles

$$-21\,\lambda_1 + 13\,\lambda_2 - 41 > 0 \qquad (13')$$

L'inéquation (*13*) nous donne le domaine d'optimisation de la solution (Dopt).

Pour réoptimiser la solution dans le domaine (*13'*) nous prenons, par exemple, les valeurs particulières $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ qui vérifient la relation (*13'*) et, éliminant $\bar{A}^3$ de la base, nous obtenons la solution optimum pour C Dopt.

$$\begin{matrix} x_2 = \dfrac{7}{9} \\ x_3 = \dfrac{1}{3} \end{matrix} \quad \text{c.a.d. } \bar{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

avec

$$\max f = \frac{22}{9}$$

et

$$[A^{I_0}]^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Nous sommes à présent dans le cas où $\bar{A}^3$ est un vecteur de la base optimum.

Afin d'appliquer les formules (*11*) et (*12*) nous effectuons un changement de variable

$$\lambda_1 = \lambda_1'$$

$$\lambda_2 = \lambda_2' + 4$$

Nous aurons

$$\max.\ x_0 = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

avec les conditions

$$x_1 + 3x_2 + (2 + \lambda_1')x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + (5 + \lambda_2')x_3 = 4$$

Pour $\lambda_1' = 0$, $\lambda_2' = 0$ nous avons la solution (*14*).

Nous déterminerons à présent le nouveau domaine d'optimisation et de réalisation

$$\bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix},$$

$$\bar{T}_0^3 = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$W_0^3 = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{9} \\ \dfrac{-\lambda_1' + \lambda_2'}{3} \end{pmatrix}$$

$$T_0^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{9} \\ \dfrac{-\lambda_1' + \lambda_2'}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{3} \\ \dfrac{-\lambda_1' + \lambda_2' + 3}{3} \end{pmatrix}$$

Il en résulte

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{9}}{\dfrac{-\lambda_1' + \lambda_2'}{3} + 1} \\ 0 \quad \dfrac{1}{\dfrac{-\lambda_1' + \lambda_2'}{3} + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{3(-\lambda_1' + \lambda_2' + 3)} \\ 0 \quad \dfrac{3}{-\lambda_1' + \lambda_2' + 3} \end{pmatrix}$$

La matrice est non singulière pour

$$-\lambda_1' + \lambda_2' + 3 \neq 0$$

c'est-à-dire, elle est singulière sur la droite

$$-\lambda_1' + \lambda_2' + 3 = 0$$

Nous avons également :

$$x_{I_0} = E^{(2)}\bar{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{3(-\lambda_1' + \lambda_2' + 3)} \\ 0 \quad \dfrac{3}{-\lambda_1' + \lambda_2' + 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/9 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il en résulte

$$x_2 = \frac{-4\lambda_1' + 3\lambda_2' + 7}{3(-\lambda_1' + \lambda_2' + 3)}$$

$$x_3 = \frac{1}{-\lambda_1' + \lambda_2' + 3}$$

Revenant aux anciennes variables nous avons :

$$x_2 = \frac{-4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5}{3(-\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}$$

(x)

$$x_3 = \frac{1}{-\lambda_1 + \lambda_2 - 1}$$

La solution est réalisable dans le domaine défini par les relations

$$-4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5 > 0$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 - 1 > 0$$

Le domaine d'optimisation de la nouvelle base se détermine à l'aide des relations

$$\delta^j = -f^{I_0} E^{(q)} T_0^j + f_0^j$$

Nous n'avons à calculer que

$$\delta^1$$

Etant donné que

$$f^{I_0} = (4, \ -2)$$

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$f_0^1 = -3$$

il en résulte

$$\delta^1 = -\ (4, -2)\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{5\lambda_1' - 2\lambda_2'}{3(-\lambda_1' + \lambda_2' + 3)} \\ 0 \quad \dfrac{3}{-\lambda_1' + \lambda_2' + 3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/9 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 3 = \frac{21\lambda_1' - 13\lambda_2' - 11}{3(-\lambda_1' + \lambda_2' + 3)}$$

Pour les anciennes variables nous avons

$$\delta^1 = \frac{21\lambda_1 - 13\lambda_2 + 41}{3(-\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}$$

La nouvelle solution est optimum pour le domaine défini par la relation

$$21\lambda_1 - 13\lambda_2 + 41 < 0$$

(il faut remarquer que cette solution coïncide avec la relation (*13'*)).

En conclusion, le domaine de variation des paramètres (λ_1, λ_2) est partagé en deux domaines par la droite :

$$21\lambda_1 - 13\lambda_2 + 41 = 0$$

Pour le domaine

$$(Dopt) \qquad 21\lambda_1 - 13\lambda_2 + 41 \geqslant 0 \tag{15}$$

nous avons la solution réalisable et optimum

$$x_2 = 5/6$$

$$x_1 = 1/2 \tag{15'}$$

pour laquelle max $f = \dfrac{11}{6}$

Pour le domaine

$$(C\ Dopt) \qquad 21\lambda_1 - 13\lambda_2 + 41 < 0 \tag{16}$$

nous avons la solution optimum :

$$x_2 = \frac{-4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5}{3(-\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}$$

$$x_3 = \frac{1}{-\lambda_1 + \lambda_2 - 1} \tag{16'}$$

pour laquelle : max $f = \dfrac{-16\lambda_1 + 12\lambda_2 - 26}{3(-\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}$

Cependant, cette solution n'est réalisable que dans le domaine *(C Dopt)'*

$$\begin{aligned} -4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5 &> 0 \\ -\lambda^1 + \lambda_2 - 1 &> 0 \end{aligned} \tag{17}$$

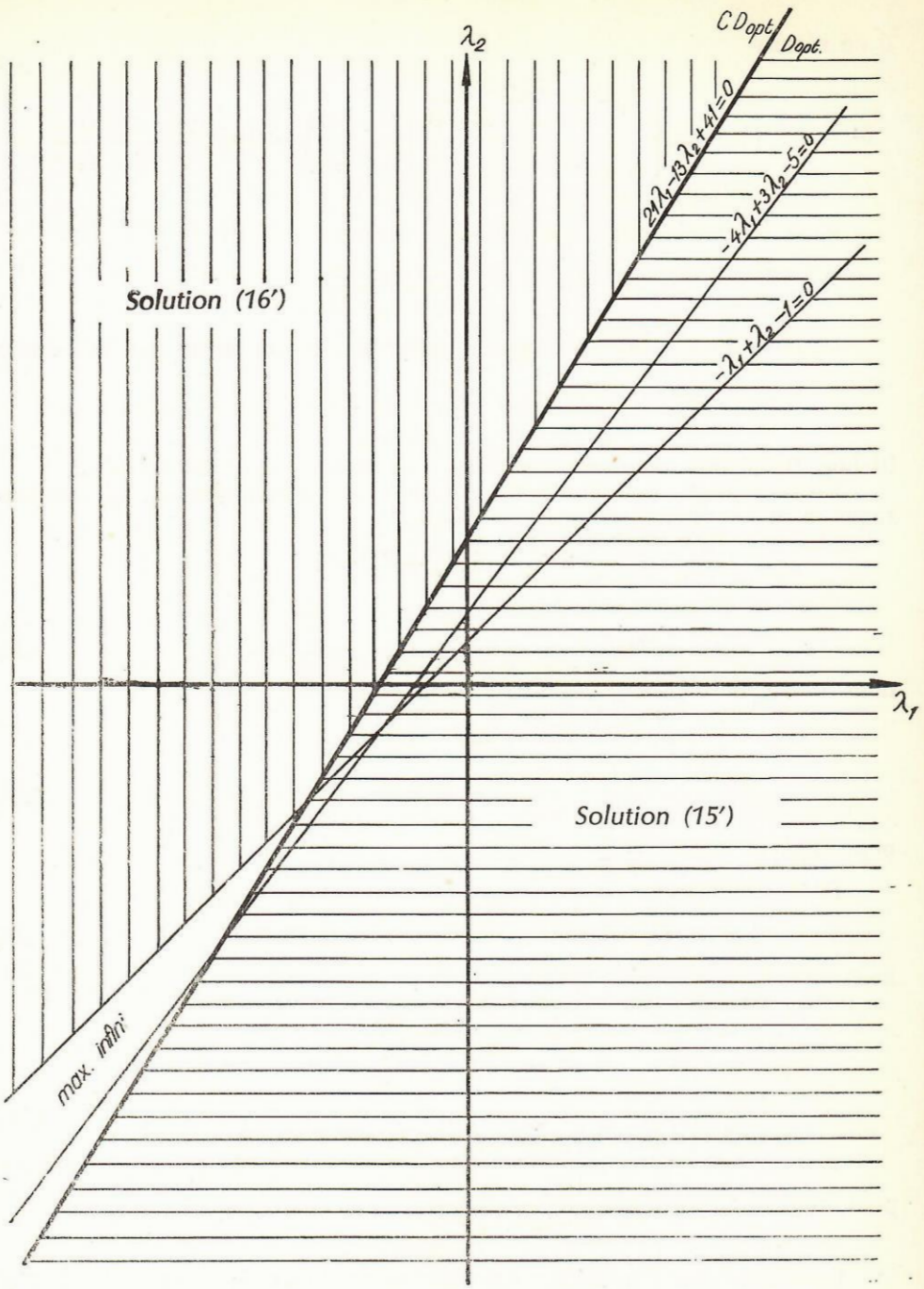
λ_2
$C_{D_{opt.}}$
$D_{opt.}$
$21\lambda_1 - 13\lambda_2 + 41 = 0$
$-4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5 = 0$
$-\lambda_1 + \lambda_2 - 1 = 0$
Solution (16')
Solution (15')
max. infhi
λ_1

Fig. 1

Dans le domaine *C Dopt — (C Dopt)'* le problème n'a pas de solution.

En donnant par conséquent des valeurs aux paramètres λ_1 et λ_2, nous pouvons facilement déterminer la solution :

— si λ_1 et λ_2 vérifient la relation (*15*) nous avons la solution (*15'*) ;

— si λ_1 et λ_2 vérifient les relations (*16*) et (*17*) nous avons la relation (*16'*)

— si λ_1 et λ_2 verifient la relation (*16*) mais ne vérifient pas la relation (*17*), le problème n'a pas de solution (maximum infini).

La division du domaine (λ_1, λ_2) par solution réalisables et optimum est indiquée dans la figure 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Maurin — *Paramétrisation générale d'un programme linéaire.* Revue Française de Recherche Opérationnelle, 32 (1965).
2. M. Manescu, V. Dumitru — *Unele aplicații ale programării liniare în probleme ale industriei petroliere (Certaines applications de programmation linéaire dans les problèmes de l'industrie du pétrole).* Studii şi Cercetări Economice, IV, 1965.
3. V. Dumitru, V. Ionescu — *Rezolvarea numerică a unei clase de probleme de programare neliniară (Solution numérique d'une classe de problèmes de programmation non-linéaire).* Studii şi Cercetări Matematice, 6, 1966.
4. M. Simonnard — *Programmation linéaire,* Dunod, Paris, 1962.

NOTE ON GENERAL PARAMETRIZING

H. Maurin deals with the problem of linear programming max $X_0 = f_0$, subjected to the restrictions $Ax = a$, x 0, where x is a column vector, f a line vector, A is the matrix of the restrictions, in which one of the column vectors $A^k = a^{-k} + pD^k$, and D^k is a constant vector.

H. Maurin's formulae may be used, as shown in the study, to solve the problem even in the case where D^k is a variabile vector.

ЗАМЕТКИ ОБ ОБЩЕЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Х. Маурин рассматривает вопрос линейного программирования так $x_0 - f_0$ подчиняющийся при ограничении A_X — a, x ⩾ o, где x — вектор-столбец, f — вектор строка, A — матрица ограничений, в которых один из векторов столбцов
$A^k - A^k + pД^k$, $aД^k$ — постоянный вектор.

Формулы Х. Маурина можно использовать, как показывается в исследовании, для решения вопроса и в случае, в котором $Д^k$ является изменяемым вектором.