P. MIRESCU
conferenciante universitario

En torno a un nuevo método para solucionar los programas cuadráticos

El método propuesto por Khaled Maghout para resolver un programa cuadrático puede adquirir un contenido mucho más próximo al algoritmo simplex y, por consiguiente, hacerse más accesible para los acostumbrados con el método del paso de una base a otra, lo que es específico para el simplex.

El objeto del presente estudio lo constituyen algunas observaciones en torno a la segunda parte de la tesis de doctorado del señor Khaled Maghout del Centro Nacional de Investigaciones Científicas de Francia, titulada „Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques". [1]

1. Se sabe que un programa cuadrático consta de

$$[\max.]\ F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_j x_k \qquad (1)$$

con

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant d_i \quad (i = 1, 2, ..., m) \qquad (2)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

donde se presupone que la matriz $B = \| b_{jk} \|$ es simétrica y positivamente definida.

[1] Esta tesis fue publicada en el 5 volumen No. 1—2/1963 de la revista „Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle" de Bruselas.

Considerando que en nuestro caso las condiciones de Kuhn y Tucker — que son necesarias y suficientes — están satisfechas, entonces el programa cuadrático tiene que solucionar el siguiente problema algébrico:

Hallar los vectores

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix}$$

que solucionan el sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = d_i & (i = 1, 2, ..., m) \\ \sum b_{jk}x_k - y_i + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_{n+1} = c_j & (j = 1, 2, ..., n) \end{cases} \tag{3}$$

con:

$$X'Y = 0 \tag{4}$$

$$X \geqslant 0, \quad Y \geqslant O \tag{5}$$

El sistema (3) puede presentarse en una de las siguientes formas:

$$AX_0 + X_{00} = D \tag{6}$$

$$BX_0 - Y_0 + A'Y_{00} = C \tag{7}$$

donde $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X_{00} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad A = \| a_{ij} \|, \qquad (i = 1, 2, \ldots m, \quad j = 1, 2, ..., n)$$

A′ es transpuesta de A, y $B = \| b_{jk} \| (j, K = 1, 2, ..., n)$

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ A & I \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -I & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \zeta = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

2. El método propuesto por el señor Khaled Maghout consiste en resolver el sistema (3) partiendo de una base admisible que verifica a (3) y a (4) y que aumenta a través de iteraciones sucesivas el número de componentes

que no son negativas de los vectores X y Y hasta el momento en que las condiciones (*5*) estén satisfechas. Hay que destacar que en una iteración principal la relación (*4*) puede dejar de ser verificada, pero, al fin y al cabo, debe estar satisfecha. Lo esencial del método propuesto consiste en que se puede obtener la solución óptima sin tener en cuenta el mejoramiento de la función económica

$$F^1 = C'X_0 - \frac{1}{2} X_0' B X_0 \qquad (8)$$

sino solamente mediante consideraciones de naturaleza algébrica, que tienen como fin — como se ha dicho ya — aumentar el número de componentes que no son negativas.

3. Con el fin de presentar lo más sucintamente posible este interesante método, introduciremos algunas definiciones.

Sea Ω el conjunto de los índices $\{1, 2, \ldots (n+m)\}$, y V y W subconjuntos de Ω. Marcaremos con X_v y Y_v los vectores de las restricciones del problema, cuyas componentes son, respectivamente, x_i y y_i con $i \in V$. De la misma manera marcaremos con A_v' la matriz de las restricciones del problema, formada por columnas de la matriz A que corresponde a unos índices $i \in V$. En estas condiciones, un sistema de forma

$$A_v \cdot X_v + B_w \cdot Y_w = \zeta \qquad (9)$$

tendrá un sentido bien definido.

Partiendo del vector de las restricciones X_v cuyas componentes son conocidas, podemos obtener el vector correspondiente X, considerando $x_i = (X_v)_i$ si $i \in V$ y $x_i = 0$ en caso de que $i \notin V$.

De modo análogo para Y.

Por ejemplo, si X_v y Y_w verifican el sistema (*9*), entonces los vectores correspondientes X y Y, verificando el sistema $AX + BY = \zeta$ también verificarán el sistema (*3*).

Llamamos base del sistema (*3*) un conjunto de $(n+m)$ componentes de X y Y — marcado con X_v y Y_w — de modo que el sistema (*9*), que se transforma en un sistema de $(n+m)$ ecuaciones con $(n+m)$ incógnitas, admita una solución única. Dicho de otra manera, (V, W), es base solamente en caso de que el determinante $|A_v, B_w|$ no sea nulo.

Decimos que tenemos *degeneración* si la solución del sistema (*9*) para una base dada incluye una de las componentes de X_v y Y_w, nula.

Llamamos "*base admisible*" una base (V, W), de modo que $V \cap W = \phi$. Una base admisible es definida por dos vectores X y Y que verifican a (*3*) y a (*4*).

El mecanismo del cambio de la base consiste en aplicar una sucesión de iteraciones del sistema: $AX + BY = \zeta$, o sea, si existe una base (V, W) de la cual podemos obtener los vectores X_v y Y_w como solución del sistema (*9*) y, si por ejemplo, queremos que el índice p entre en V (respectivamente el índice q en W), entonces debemos solucionar el sistema

$$A_v \cdot R_v + B_w \cdot T_w = A_p \text{ (respectivamente } B_q). \qquad (10)$$

---

[1] Al escribir esta función se han tenido en cuenta las anotaciones antes introducidas.

De los sistemas (*9*) y (*10*) obtenemos para un θ cualquiera:

$$A_p \cdot \theta + A_v(X_v - \theta \cdot R_v) + B_w(Y_w - \theta \cdot T_w) = \zeta$$

$$B_q \cdot \theta + A_v(X_v - \theta \cdot R_v) + B_w(Y_w - \theta \cdot T_w) = \zeta$$

De donde resulta que los vectores:

$$\begin{cases} X_{v+\{p\}} = \begin{cases} X_v = X_v - \theta \cdot R_v, \\ x_p = \theta \end{cases} & Y_w = Y_w - \theta \cdot T_w \\ X_v = X_v - \theta \cdot R_v, \quad Y_{w+\{q\}} = \begin{cases} Y_w = Y_w - \theta \cdot T_w \\ y_q = \theta \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

verifican el sistema (*7*) cualquiera que sea θ.

Para hallar una nueva base debemos escoger un tal θ para que uno de los índices pueda abandonar la base para ceder el lugar a p (respectivamente a q), que debe entrar en la nueva base.

Es decir, debemos escoger un θ para que se anule una de las componentes de X ó Y, dada por (11).

Podemos eliminar de la base cualquier componente x_i, $j \in V$(ó y_i, $i \in W$), a condición de que γ_j (ó τ_i) sea distinto de cero. A este fin basta con considerar $\theta = \frac{x_j}{\gamma_j}\left(\text{ó } \theta = \frac{y_i}{\tau_i}\right)$ para hallar una nueva base.

La elección de θ no es arbitraria, sino que θ debe ser elegida de manera que:

1) sea mantenida cualquier componente que no sea negativa;

2) pueda ser eliminada de la base una componente negativa, bien definida, x_h(ó y_h) por la cual γ_h (ó τ_h) $\leqslant 0$.

Para satisfacer este doble fin debemos considerar

$$\theta = \min \cdot \left\{ \frac{x_h}{\gamma_h}\left(\text{ó } \frac{y_h}{\tau_h}\right), \ \frac{x_v}{\gamma_v}, \ \frac{y_w}{\tau_w} \,\middle|\, x_v, \ y_w \geqslant 0, \ \gamma_v, \ \tau_w > 0 \right\} \tag{12}$$

(prefiriendo a $\frac{x_h}{\gamma_h}\left(\text{ó a}\frac{y_h}{\tau_h}\right)$ si es mínimo).

La *iteración principal* consiste en pasar de una base admisible a otra base admisible, si aumentamos por lo menos en una unidad el número de las componentes, que no son negativas, de los vectores X, Y. En el curso de una *iteración principal* es posible efectuar — si es necesario — *iteraciones secundarias*, que conducirán a una iteración principal.

Supongamos que la base admisible (V, W) da una de las componentes de Y_w negativa, por ejemplo $y_h < 0$ ($h \in W$). En este caso decimos que existe un *conflicto* en y_h.

La iteración principal tiene como fin solucionar este conflicto mediante la construcción de otra base admisible en la cual, esta vez $h \in V$ (o sea, $h \notin W$).

En este caso, la elección del índice que abandone la base de acuerdo con las fórmulas (*12*) será:

$$\theta = \min\left\{\frac{y_h}{\tau_h},\ \frac{x_v}{\gamma_v},\ \frac{y_w}{\tau_w}\ \middle|\ x_v,\ y_w \geqslant 0,\ \gamma_v,\ \tau_w \geqslant 0\right\} \qquad (13)$$

Una vez efectuada la elección de θ, las fórmulas que dan las nuevas componentes de la nueva base son:

$$x'_h = \theta \geqslant 0$$

$$x'_v = x_v - \theta \cdot \tau_v\ (\geqslant 0,\ \text{si}\ x_v \geqslant 0) \qquad (14)$$

$$y'_w = y_w - \theta \cdot \tau_w\ (\geqslant 0,\ \text{si}\ y_w \geqslant 0)$$

Solucionaremos todos estos conflictos hasta que obtengamos un vector Y, cuyas componentes, en su totalidad, lleguen a ser no negativas.

Primeramente se solucionan los conflictos en Y, empezando en cada iteración principal por las componentes "más negativas", si podemos expresarnos así, y después, los conflictos en X, empezando también por las componentes negativas, en el mismo orden.

El valor de la función económica se calcula en cada iteración con ayuda de la fórmula

$$2[F(V^2, W^2) - F(V^1, W^1)] = X'_1 \cdot Y_2 - Y'_1 \cdot X_2 + X' \cdot Y_1 - X'_2 \cdot Y_2 \qquad (15)$$

Para completar dicha fórmula, subrayamos que las variaciones de F se pueden precisar fácilmente, ya que entre dos bases consecutivas tenemos la relación

$$2(F^2 - F^1) = (x_h^1 - x_h^2)\ (y_h^1 - y_h^2) \qquad (16)$$

donde h es índice del conflicto de la iteración principal.

II

Seguidamente trataremos del método propuesto por el autor para solucionar los programas cuadráticos.

II. 1. Este método puede ser muy parecido al algoritmo simplex no solamente en lo que se refiere al "mecanismo del cambio de la base".

Mantenemos la misma anotación para los vectores X y Y, así como para las matrices A y B del sistema (*3*).

En cambio, emplearemos las anotaciones

$$A = (A, I),\ B = (B, O),\ M = \begin{Bmatrix} A & \overbrace{0} \\ B & 1, -A' \end{Bmatrix}$$

donde M representa la matriz del sistema (*3*). Los vectores columna de esta matriz serán marcados con P_i y Q_i, respectivamente, ($i = 1, 2, \ldots, m$). Mar-

camos con P_0 el vector$\begin{pmatrix} D \\ -C \end{pmatrix}$, donde D y C tienen el mismo significado que encontramos en la tesis mencionada.

Descomponemos la matriz M en dos submatrices

$$M' = (A, O) \text{ y } M'' = (B, I - A').$$

Sea V y W dos subconjuntos del conjunto $Q = \{1, 2, 3, ..., (n + m)\}$ de los índices.

Las componentes de los vectores P_i y Q_i se marcarán con $(\gamma_{v,i})_{P \text{ó} Q}$ y, $(\tau_{w,i})_{P \text{ó} Q}$, respectivamente, donde $P = \{P_i\}$ y $Q = \{Q_i\}$.

Mantendremos la misma definición para los vectores de la base, o sea, (V, W).

Se sabe del algoritmo simplex que, utilizando la noción de pivote, los escalares utilizados para transformar los vectores de la matriz M al cambiar la base, tienen la siguiente forma

$$\left(\frac{\gamma_{h,i}}{\gamma_{h,j}}\right)_{\substack{P \text{ó} Q \\ i \neq j}} \text{ ó } \frac{(\gamma_{h,i})_{P \text{ó} P}}{(\gamma_{h,i})_{P \text{ó} Q}}, \text{ si } h \in V$$

$$\left(\frac{\tau_{h,i}}{\tau_{h,j}}\right)_{\substack{P \text{ó} O \\ i \neq j}} \text{ ó } \frac{(\tau_{h,i})_{P \text{ó} Q}}{(\tau_{h,i})_{Q \text{ó} P}}, \text{ si } h \in W$$

La fórmulas que dan las componentes de los vectores en la nueva base, si $h \in V$, son

$$(\gamma_{v,i})_{Q \text{ó} P} - \frac{(\gamma_{h,i})_{Q \text{ó} P}}{(\gamma_{h,j})_{\substack{P \text{ó} Q \\ i \neq j}}} \cdot (\gamma_{v,j})_{P \text{ó} Q} \qquad (1')$$

para las componentes de los vectores correspondientes al conjunto V de índices, y

$$(\tau_{w,i})_{Q \text{ó} P} - \frac{(\gamma_{h,i})_{Q \text{ó} P}}{(\gamma_{h,i})_{P \text{ó} Q}} \cdot (\tau_{w,j})_{P \text{ó} Q} \qquad (2')$$

para las componentes de los vectores correspondientes al conjunto W de índices.

Si $h \in W$, entonces las respectivas fórmulas son.

$$(\gamma_{v,i})_{P \text{ó} Q} - \left(\frac{\tau_{h,i}}{\tau_{h,j}}\right)_{\substack{P \text{ó} Q \\ i \neq j}} \cdot (\gamma_{v,j})_{P \text{ó} Q} \qquad (3')$$

$$(\tau_{w,i})_{P \text{ó} Q} - \left(\frac{\tau_{h,i}}{\tau_{h,j}}\right)_{\substack{P \text{ó} Q \\ i \neq j}} \cdot (\tau_{w,j})_{P \text{ó} Q} \qquad (4')$$

Las fórmulas de arriba pueden ser utilizadas en la práctica muy fácilmente si usamos el procedimiento de la multiplicación en cruz de Routh.

Estas fórmulas se utilizarán también para las componentes de los vectores X y Y por lo cual mantenemos la misma anotación (x_i), $i \in V$ y (y_j), $j \in W$, utilizada por el señor Khaled Maghout.

II.2. (*a*). En lo que se refiere al cálculo de los valores de la función económica de una iteración a otra, utilizamos las fórmulas establecida spor e señor Khaled Maghout, precisando que la fórmula (*15*) puede ser fácilmente retenida si se escribe bajo la forma

$$X_1' \cdot Y_2 - Y_1' \cdot X_2 + X_1' \cdot Y_1 - X_2' \cdot Y_2 = (X_1' - X_2') \cdot Y_2 + \begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2 & Y_1 \end{vmatrix} \quad (5')$$

Para bases admisibles, la fórmula (*15*) se reduce a la forma

$$\begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \quad (6')$$

II.2 (*b*). También precisamos que utilizaremos íntegramente tanto la definición de la iteración principal, (con las eventuales iteraciones secundarias), como la de conflicto.

Por consiguiente, los criterios establecidos por el autor para pasar de una base a otra, se mantienen.

II.3. Con estas observaciones demonstramos, por completo, los cálculos hechos para solucionar los ejemplos 1 y 2, propuestos por el autor y para los cuales, esta vez, las iteraciones correspondientes son presentadas bajo la conocida forma del algoritmo simplex.

Primer ejemplo:

$$[\max.]\ F = 5x_1 + 12x_2 + 36x_3 + 7x_4 - \frac{1}{2}(5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2 + 10x_4^2) \quad (1)$$

con

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leqslant -18 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant -5 \\ -3x_2 + x_4 \leqslant 1 \\ x_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Para obtener el sistema (*3*) encontramos

$$\begin{aligned} 5 &= 5x_1 + 2x_2 - x_4 - y_1 + y_5 - y_6 \\ 12 &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - y_2 + y_5 + y_6 - 3y_7 \\ 36 &= -3x_2 + 9x_3 - y_3 - y_5 - 2y_6 \\ 7 &= -x_1 + 10x_4 - y_4 - y_5 + y_7 \end{aligned} \quad (2)$$

En este caso el sistema (3) de la primera parte se puede escribir así:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= -18 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 &= -5 \\
-3x_2 + x_4 + x_7 &= -1 \\
-5x_1 - 2x_2 + x_4 + y_1 + y_5 + y_6 &= -5 \\
-2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + y_2 + y_5 - y_6 + 3y_7 &= -12 \\
3x_2 - 9x_3 + y_3 + y_5 + 2y_6 &= -36 \\
x_1 - 10x_4 + y_4 + y_5 - y_7 &= -7
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

donde

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = (A, I)
$$

$$
B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad B = (B, O)
$$

La matriz M es

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
-2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\
0 & 3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

cuyos vectores columna son marcados con P_i y Q_i, respectivamente, $(i = 1, 2, \ldots 7)$

El vector P_0 es:

$$
\begin{pmatrix} -18 \\ -5 \\ 1 \\ -5 \\ -12 \\ -36 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

Presentamos el cuadro T_1 en que están efectuados los cálculos necesarios para obtener la solución

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = \frac{2{,}301}{35} \qquad x_5 = 0 \qquad y_5 = \frac{2.583}{35}$$

$$x_2 = \frac{72}{35} \qquad y_2 = 0 \qquad x_6 = \frac{131}{7} \qquad y_6 = 0$$

$$x_3 = \frac{451}{35} \qquad y_3 = 0 \qquad x_7 = 0 \qquad y_7 = \frac{318}{35}$$

$$x_4 = \frac{251}{35} \qquad y_4 = 0$$

y [max.] $F = -390$

En lo que se refiere al cálculo de la función económica, precisamos que en el caso de pasar, por ejemplo, de la primera a la segunda iteración, es útil emplear la fórmula (*6*), puesto que se trata de una base admisible.

Por ejemplo:

$$(0, 0, 0, 0, -18, -5, 1)\begin{pmatrix} -5 \\ -24 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-5, -12, -36, -7, 0, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -14 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + 36 \cdot 4 = 144 = 2F$$

En todo caso, aplicar la fórmula (*5* ó *6*) no necesita cálculos loboriosos.

Para el segundo ejemplo presentamos el cuadro T_2 en que se exponen los cálculos hechos.

En este caso sacamos la conclusión de que θ no puede ser calculada en la última iteración, ya que las componentes del vector Q_2, que deberían entrar en la base, son nulas o negativas.

Como se ha mencionado, el problema no tiene solución porque las restricciones son incompatibles.

En la forma presentada más arriba, el nuevo método establecido por el señor Khaled Maghout adquire un contenido mucho más cercano al algoritmo simplex y con esto llega a ser más accesible a los acostumbrados con el método de pasar de una base a otra, específica para el simplex.

También precisamos que el empleo de las fórmulas establecidas por el señor Khaled Maghout se reduce, en realidad, a la aplicación del mismo procedimiento de Routh, de la multiplicación en cruz. Este método modificado permite ser más accesibles los problemas de programación cuadrática.

T_1

Bases	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	θ	
P_5	—18	1	1	—1	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_6	—5	—1	1	—2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_v	I_p
P_7	1	0	—3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
Q_1	—5	—5	—2	0	+1	0	0	0	1	0	0	0	—1	1	0		
Q_2	—12	—2	—2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	—1	—1	+3	τ_w	
Q_3	—36*	0	+3	—9*	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	$\theta=4$	
Q_4	—7	1	0	0	—10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	—1		
P_3	4	0	—1/3	1	0	0	0	0	0	0	—1/9	0	—1/9	—2/9	0		
P_5	—14	1	2/3	0	—1	1	0	0	0	0	—1/9	0	—1/9	—2/9	0		I_s
P_6	3	—1	1/3*	0	0	0	1	0	0	0	—2/9	0	—2/9	—4/9	0	$\theta=9$	
P_7	1	0	—3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
Q_1	—5	—5	—2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	—1	1	0		
Q_2	—24*	—2	—1	0	0	0	0	0	0	1	+1/3	0	—2/3	—1/3	3		
Q_4	—7	1	0	0	—10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	—1		

T_1

Bases	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	θ	
P_3	7	—1	0	1	0	0	1	0	0	0	—1/3	0	—1/3	—2/3	0		
P_5	—20	3	0	0	—1	1	—2	0	0	0	1/3	0	1/3	2/3	0		
P_2	9	—3	1	0	0	0	3	0	0	0	—2/3	0	—2/3	—4/3	0		
P_7	28	—9	0	0	1	0	9	1	0	0	—2	0	—2	—4	0		I_p
Q_1	13	—11	0	0	1	0	6	0	1	0	—4/3	0	—7/3	—5/3	0		
Q_2	—15*	—5	0	0	0	0	3	0	0	1	—1/3	0	—4/3	—5/3*	3	$\theta=9$	
Q_4	—7	1	0	0	—10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	—1		
P_3	13	1	0	1	0	0	—1/5	0	0	—2/5	—1/5	0	1/5	0	—6/5		
P_5	—26	4	0	0	—1	1	—4/5	0	0	2/5	1/5	0	—1/5	0	6/5		
P_2	21	1	1	0	0	0	3/5	0	0	—4/5	—2/5	0	2/5	0	—12/5		I_p
P_7	64	2	0	0	1	0	9/5	1	0	—12/5	—6/5	0	6/5	0	—36/5		
Q_1	28	—6	0	0	1	0	3	0	1	—1	—1	0	—1	0	—3		
Q_6	9	3	0	0	0	0	—9/5	0	0	—3/5	1/5	0	4/5	1	—9/5	$\theta=\frac{7}{10}$	
Q_4	—7*	1	0	0	—10*	0	0	0	0	0	0	1	1	0	—1		

T_1

Bases	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	θ	
P_3	13	1	0	1	0	0	—1/5	0	0	— 2/5	—1/5	0	1/5	0	—6/5		
P_5	—25.3*	3.9	0	0	0	1	—4/5	0	0	—2/5	1/5	—1/10	—3/10	0	13/10		
P_2	21	1	1	0	0	0	3/5	0	0	—4/5	—2/5	0	2/5	0	—12/5		
P_7	63.3	3.1	0	0	0	0	9.5	1	0	—12/5	—6/5	1/10	13/10	0	—73/10		
P_4	7/10	—0.1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	—1/10	—1/10	0	—1/10		I_s
Q_1	27.3	—5.9	0	0	0	0	3	0	1	—1	—1	1/10	—9/10	0	—31/10		
Q_6	9	3	0	0	0	0	—9/5	0	0	—3/5	1/5	0	4/5*	1	—9/5	$\theta=\frac{45}{4}$	
P_3	43/4	1/4	0	1	0	0	1/4	0	0	—1/4	—1/4	0	0	—1/4	—3/4		
P_5	—877/40*	201/40	0	0	0	1	—59/40	0	0	7/40	—11/40	—1/10	0	3/8	5/8		
P_2	33/2	—1/2	1	0	0	0	3/2	0	0	—1/2	3/10	0	0	—1/2	—3/2	$\theta=\frac{649}{63}$	
P_7	1947/40	—71/40	0	0	0	0	189/40*	1	0	—57/40	—61/40	—1/10	0	—13/8	—35/8		
P_4	73/40	11/40	0	0	1	0	—9/40	0	0	—3/40	1/40	—1/10	0	1/8	—1/8		
Q_1	1497/40	—101/40	0	0	0	0	39/40	0	1	—67/40	—31/40	—1/10	0	9/8	—41/8		I_s
Q_5	45/4	15/4	0	0	0	0	—9/4	0	0	—3/4	1/4	0	1	5/4	—9/4		
P_3	515/63	65/189	0	1	0	0	0	—10/189	0	—11/63	—32/189	—1/189	0	—31/189	—14/27		
P_5	—424/63*	845/189	0	0	0	1	0	59/189	0	17/63	—19/378	—13/189	0	—25/189	—20/27*		
P_2	22/21	4/63	1	0	0	0	0	—20/63	0	1/21	58/315	—2/63	0	1/63	—1/9	$\theta=\frac{318}{35}$	
P_6	649/63	—71/189	0	0	0	0	1	40/189	0	—19/63	—61/189	—4/189	0	—65/189	—25/27		
P_4	29/7	4/21	0	0	1	0	0	1/21	0	—1/7	—1/21	—2/21	0	1/21	—1/3		

T_1

Bases	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	θ	
Q_1	575/21	—136/63	0	0	0	0	0	—13/63	1	29/21	—29/63	5/63	0	92/63	—38/9		
Q_5	241/7	61/21	0	0	0	0	0	10/21	0	—10/7	—10/21	1/21	1	10/21	—13/3		I_p
P_3	451/35	—39/7	0	1	0	—7/10	0	—19/70	0	1/70	—169/1260	—1/540	0	—1/14	0		
P_2	72/35	—17/8	1	0	0	—3/20	0	—51/140	0	—1/140	161/840	—3/140	0	—1/28	0		
P_6	131/7	—167/28	0	0	0	—5/4	1	—5/28	0	7/36	—131/504	3/28	0	—5/28	0		
P_4	251/35	—51/28	0	0	1	—9/20	0	—13/140	0	—3/140	—1/40	—9/40	0	3/28	0		
Q_1	2301/35	—387/14	0	0	0	—57/10	0	—139/70	1	11/70	—73/420	33/70	0	31/14	0		I_p
Q_5	2583/35	—651/28	0	0	0	—117/20	0	—27/20	0	3/20	—51/280	9/20	1	5/4	0		
Q_7	318/35	—169/28	0	0	0	—27/20	0	—59/140	0	51/140	19/40	13/140	0	5/28	1		

La solución es: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{72}{35}$; $x_3 = \frac{451}{35}$; $x_4 = \frac{251}{35}$; $x_5 = 0$; $x_6 = \frac{131}{7}$; $x_7 = 0$

$$y_1 = \frac{2301}{35};\ y_2 = y_3 = y_4 = 0;\ y_5 = \frac{2583}{35};\ y_6 = 0;\ y_7 = \frac{318}{35}$$

[max] F = —390

T_2

Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	θ	
P_5	—3	—1	—1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_6	2	0	1*	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	γ_v	
P_7	—6	3	0	—1	—3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\theta = 2$	
Q_1	40	—2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	—3		I_p
Q_2	—28*	0	—10	3	1	0	0	0	0	1	0	0	1	—1	0		
Q_3	—17	0	3	—9	—3	0	0	0	0	0	1	0	—1	—1	1	τ_w	
Q_4	—27	2	—1	—3	—5	0	0	0	0	0	0	1	0	—4	3		
P_5	—1	—1	0	2	4	1	—1	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_2	2	0	1	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_7	—6	3	0	—1	—3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
Q_1	40	—2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	—3		I_s
Q_2	—8*	0	0	13	41	0	10	0	0	1	0	0	1	—1*	0		
Q_3	—23	0	0	—12	—15	0	3	0	0	0	1	0	—1	—1	1	$\theta = 8$	
Q_4	—29	2	0	—4	—9	0	—1	0	0	0	0	1	0	—4	3		
P_5	—1	—1	0	2	4	1	—1	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_2	2	0	1	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_7	—6	3	0	—1	—3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
Q_1	40	—2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	—3		I_s
Q_6	8	0	0	—13	—41	0	—10	0	0	—1	0	0	—1	1	0		
Q_3	—15*	0	0	—25*	—56	0	—13	0	0	—1	1	0	0	0	1	$\theta = \frac{3}{5}$	
Q_4	3	2	0	—56	—173	0	—15	0	0	—4	0	1	4	0	3		

T_2

Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	θ	
P_5	—11/5	—1	0	0	—12/25	1	—51/25	0	0	—2/25	0	0	0	0	2/25		
P_2	7/5	0	1	0	44/25	0	12/25	0	0	—1/25	0	0	0	0	1/25*	$\theta = 35$	
P_7	—27/5*	3	0	0	—19/25	0	—13/25	1	0	1/25	0	0	0	0	1/25		
P_3	3/5	0	0	1	56/25	0	13/25	0	0	1/25	—1/25	0	0	0	—1/25		I_p
Q_1	40	—2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	—3		
Q_6	79/5	0	0	0	—297/25	0	—81/25	0	0	—12/25	0	0	—1	1	—13/25		
Q_4	183/5	2	0	0	—1189/20	0	353/25	0	0	—44/25	0	1	4	0	19/25		
P_5	—5	—1	—2	0	—4	1	—3	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_7	—4	3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_3	2	0	1	1	4	0	1	0	0	0	1/25	0	0	0	0		I_p
Q_1	145	—2	75	0	134	0	36	0	1	—3	0	0	0	0	0		
Q_6	34	0	13	0	11	0	3	0	0	—1	0	0	—1	1	0		
Q_4	10	2	—19	0	—888/25	0	5	0	0	—1	0	1	4	0	0		
Q_7	35	0	—25	0	44	0	12	0	0	—1	0	0	0	0	1		

La iteración no se puede continuar ya que las componentes del vector Q_2, que deberían entrar en la base, son nulas ó negativas, de modo que θ nu puede ser calculado en la última iteración.

El problema no tiene solución porque las restricciones son incompatibles.

ABOUT A NEW METHOD OF SOLVING SQUARE PROGRAMMES

Taking Khaled Maghout's proposed method for solving square programmes as a starting point, the author demonstrates that this method could be brought much closer to simplex algorithm, and not only concerning the "base changing mechanism". The formulae established can be very easily used in practice by means of Routh's cross multiplication process. This modified method renders square programming problems more approachable.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE RÉSOUDRE DES PROGRAMMES CARRÉS

En partant de la méthode proposée par Khaled Maghout en vue de la solution d'un programme carré, l'auteur montre comment celle-ci pourrait être sensiblement rapprochée de l'algorithme simplex, et cela non seulement en ce qui concerne le „mécanisme du changement de base". Les formules établies peuvent être utilisées fort aisément dans la pratique au moyen du procédé de la multiplication en croix de Routh. Cette méthode modifiée rend plus accesibles les problèmes de la programmation carrée.

О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ПРОГРАММЫ

Исходя из метода, предложенного Халедом Магоутом для решения квадратичной программы, автор показывает, что этот метод может быть приближен к упрощенному алгоритму не только что касается «механизма изменения основы».

Установленные формулы на практике легко применимы, если мы используем метод крестового размножения Рута. Этот измененный метод делает более доступными проблемы квадратичного программирования.